

Cálculo de Áreas de figuras planas utilizando a fundamentação teórica da Geometria Analítica

Calculation of Areas of plane figures using the theoretical foundation of Analytical Geometry

Cálculo de Áreas de figuras planas utilizando la fundamentación teórica de la Geometría Analítica

Recebido: 09/03/2022 | Revisado: 15/03/2022 | Aceito: 20/03/2022 | Publicado: 27/03/2022

Gustavo Nogueira Dias

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1315-9443>

Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil

ORCID: gustavonogueiradias@gmail.com

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1413-0047>

Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil

ORCID: jwl_pedrosa@hotmail.com

Pedro Roberto Sousa da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1780-5705>

Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, Brasil

ORCID: prof.pedromat@hotmail.com

Gilberto Emanuel Reis Vogado

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4763-4767>

Universidade do Estado do Pará, Brasil

ORCID: gvogado@globo.com

Fabricio da Silva Lobato

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8240-8039>

Universidade do Estado do Pará, Brasil

ORCID: fabriolobatomat15@hotmail.com

Wagner Davy Lucas Barreto

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0675-9005>

Colégio Federal Tenente Rêgo Barros, Brasil

ORCID: profwlucas@yahoo.com.br

Gerson Pompeu Pinto

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6740-4507>

Colégio Federal Tenente Rêgo Barros, Brasil

ORCID: gersonpompeu@gmail.com

Katiane Pereira da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7864-6467>

Universidade Federal Rural da Amazônia, Brasil

ORCID: Katiane.silva@ufra.edu.br

Antonio Thiago Madeira Beirão

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1366-5995>

Universidade Federal Rural da Amazônia, Brasil

ORCID: Thiago.madeira@ufra.edu

Reginaldo Pereira Flor

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4125-2434>

Secretaria de Educação do Estado do Pará, Brasil

ORCID: reginaldopereiraactrb@gmail.com

Ricardo Daniel Soares Santos

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8486-4807>

Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil

E-mail: rdsantostina@yahoo.com.br

Resumo

O artigo a seguir refere-se à obtenção da área de figuras planas por meio da fundamentação teórica da Geometria Analítica. A utilização dos conceitos da geometria analítica surgiu a partir da dificuldade em encontrar a solução proposta pela geometria plana. Percebeu-se que o uso dos eixos cartesianos inseridos na figura em uma posição em que a origem seria bem determinada e os lados fornecidos seriam parte das abscissas e das ordenadas solicitadas, formando pontos analíticos no sistema formado. O objetivo deste artigo foi trazer uma argumentação forte em relação a solução do problema quando pensado sobre os conceitos da geometria analítica, favorecendo a rapidez e agilidade nos cálculos, utilizando os conceitos de reta, área de um triângulo, ângulo entre retas, distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta. A metodologia propõe a solução de dois problemas envolvendo a parte de ponto e reta,

fazendo o comparativo com a geometria plana. Como resultado positivo teremos uma enorme aplicação da geometria analítica em variados problemas da geometria plana como também a utilização em formas geométricas do cotidiano favorecendo a diminuição do tempo de resposta ao item em testes de vestibulares e concursos públicos.

Palavras-chave: Áreas de figuras planas; Geometria analítica; Pontos analíticos; Reta.

Abstract

The following article refers to obtaining the area of plane figures through the theoretical foundation of Analytical Geometry. The use of analytical geometry concepts arose from the difficulty in finding the solution proposed by plane geometry. It was noticed that the use of Cartesian axes inserted in the figure in a position in which the origin would be well determined and the sides provided would be part of the requested abscissas and ordinates, forming analytical points in the formed system. The objective of this article was to bring a strong argument in relation to the solution of the problem when thinking about the concepts of analytical geometry, favoring the speed and agility in the calculations, using the concepts of straight line, area of a triangle, angle between straight lines, distance between two points, distance between point and line. The methodology proposes the solution of two problems involving the part of point and line, making the comparison with the plane geometry. As a positive result, we will have a huge application of analytical geometry in various problems of plane geometry as well as the use in everyday geometric shapes, favoring the reduction of the response time to the item in vestibular tests and public tenders.

Keywords: Areas of plane figures; Analytical geometry; Analytical points; Forthright.

Resumen

El siguiente artículo se refiere a la obtención del área de figuras planas a través de la fundamentación teórica de la Geometría Analítica. El uso de conceptos de geometría analítica surgió de la dificultad de encontrar la solución propuesta por la geometría plana. Se notó que el uso de ejes cartesianos insertados en la figura en una posición en la que el origen estaría bien determinado y los lados proporcionados formarían parte de las abscisas y ordenadas solicitadas, formando puntos analíticos en el sistema formado. El objetivo de este artículo fue traer un argumento fuerte en relación a la solución del problema al pensar en los conceptos de geometría analítica, favoreciendo la rapidez y agilidad en los cálculos, utilizando los conceptos de recta, área de un triángulo, ángulo entre rectas, distancia entre dos puntos, distancia entre punto y recta. La metodología propone la solución de dos problemas que involucran la parte de punto y línea, haciendo la comparación con la geometría del plano. Como resultado positivo tendremos una gran aplicación de la geometría analítica en diversos problemas de geometría plana así como el uso en formas geométricas cotidianas, favoreciendo la reducción del tiempo de respuesta al ítem en pruebas vestibulares y concursos públicos.

Palabras clave: Áreas de figuras planas; Geometría analítica; Puntos analíticos; Recta.

1.Introdução

A geometria possui um milenar histórico de seus usos e contribuições para a humanidade. Entender a geometria ao longo da história, pode ser um fator de superação de obstáculos epistemológicos de professores formados e em formação, bem como indicar possibilidades de abordagem em sala de aula sobre o tema, haja visto que como a pedagogia e o processo de ensino e aprendizagem funciona atualmente no cotidiano escolar.

A Geometria teve seu surgimento com primeiros estudos em trigonometria pela necessidade de se medir distâncias inacessíveis em problemas que surgiram na agricultura, agronomia, navegação e medicina com primeiros registros entre os babilônios e egípcios.

Na concepção de Boyer (2012), na Babilônia havia grande interesse pela Astronomia e ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Em 28 a. C. foi construído um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

Pitágoras de Samus (542-497 a. C.) apresentou a interdependência entre número, espaço e harmonia, em um experimento chamado monocórdio, que representou um avanço quanto a ideia de função, relacionando variáveis de naturezas diferentes, o que exemplifica a superação do obstáculo da homogeneidade, pois até então só se podia comparar elementos de mesma natureza ou dimensão.

Séculos depois, o grego Eratóstenes de Cirene (276 - 196 a.C.), por volta de 200 a. C., se apropriou dessa possibilidade de relacionar grandezas diferentes ao medir a circunferência da Terra, utilizando relações entre ângulos e

cordas, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Com esse feito, Eratóstenes marcou o fechamento de dois séculos de lentos avanços na trigonometria.

Para Boyer (2012, p. 124), embora os gregos estudassem as relações entre retas e círculos e as aplicassem na Astronomia, disso não resultou uma trigonometria sistemática, indicando que muito se precisava avançar no que diz respeito a formalização de nosso objeto matemático, sendo este um obstáculo para que se avançasse mais.

Na concepção de Secco, et al (2020), o ensino da matemática não é uma tarefa fácil, observa-se que existem algumas razões para esta dificuldade, talvez pela ausência de recursos pedagógicos e/ou falta de aplicação de uma metodologia de ensino que proporcione aos alunos o interesse em aprender, mais especificamente, falta de exemplos práticos que mostrem a aplicação da matemática no cotidiano dos discentes fora do ambiente escolar.

A Trigonometria – estudos dos triângulos – serviu desde os antigos babilônios, até pouco antes de Descartes, como instrumento puramente prático de agrimensura, astronomia e navegação. Os perscrutadores de estrelas e marinheiros, sondando os céus ou varrendo os mares, frequentemente necessitavam calcular distâncias que não podiam ser medidas com a régua ou a trena. A Trigonometria tornava isso possível pela simples aplicação de certas regras básicas sobre as relações entre os lados e os ângulos de qualquer triângulo, grande ou pequeno (Dias, G. N., 2011)

Presume-se que tenha sido Hiparco quem de fato estabeleceu, por volta de século II a.C., as bases da trigonometria. Mas os hindus e os árabes também contribuíram para seu desenvolvimento. Contudo, foi na Europa do século XV que a trigonometria começou a ganhar importância, graças à influência de vários matemáticos, sobretudo o alemão Johann Müller, mais conhecido pelo nome latino Regiomontanus. Ele trabalhou pela organização da trigonometria como uma disciplina independente da astronomia, além de escrever vários livros sobre tema, tais como de *triangulis*, em 1464. (Iezzi, 1993).

O currículo da Educação Básica, particularmente o do Ensino Médio é regido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Ensino Médio, 2002), com base nos princípios da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (9.394/96, LDB).

A esse respeito, reza o artigo 22 que: A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (Brasil, 1996, p. 22).

Na verdade, a ânsia do professor é tentar repassar os conteúdos de uma maneira bem acessível ao aluno, utilizando várias transposições didáticas que não são expostas nos livros didáticos.

Um dos objetivos do professor em sala de aula é tentar repassar os conteúdos aos alunos de uma maneira que seja didaticamente mais acessível para a compreensão e interpretação de todos durante a aula, utilizando várias transposições didáticas que não estão expostas nos livros didáticos e nem nos livros recomendados aos exames vestibulares. Neste sentido, destaca-se a contribuição de Chevallard (1986): um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (Chevallard, 1986, p.90).

O objetivo deste artigo foi trazer uma argumentação forte em relação a solução do problema quando pensado sobre os conceitos da geometria analítica, favorecendo a rapidez e agilidade nos cálculos, utilizando os conceitos de reta, área de um triângulo, ângulo entre retas, distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta.

Um dos fatores principais na atualidade é a redução da quantidade de exercícios e atividades nos livros didáticos, sendo que o professor tem que utilizar da internet constantemente para exploração de um conteúdo mais adequado a sua prática.

De acordo com Pinheiro et al (2021), A Educação Matemática está nas confluências das tentativas de busca por metodologias que possibilitem o alcance de entusiasmos em querer conhecer ou se apropriar dos conhecimentos da matemática para a explicação dos acontecimentos da vida.

No mundo atual conjuntamente com os livros com acesso restrito a muitos sistemas de ensino temos o acesso a internet, onde o acesso a diversas formas de ensinar e aprender em múltiplos espaços e a todo momento, a educação sempre combinou vários espaços, tempos, atividade, metodologias, públicos, ou seja, a educação sempre foi misturada, e esse processo ficou mais evidente com a conectividade (Dias, et al, 2021).

Na concepção de Cabral et al (2020), sabe-se que o ensino de matemática é caracterizado, em sua grande maioria, pela exposição oral dos conceitos prontos e a repetição de algoritmos em exercícios, sem uma aplicação prática. Este processo constitui um caminho fechado para a construção de novas ideias por parte do aluno. É necessário que a matemática ensinada esteja interligada com as práticas do cotidiano e com as demais áreas do conhecimento.

No contexto atual, a proposta é trabalhar em sala de aula assuntos relacionados a situações práticas que possibilitem aos discentes a oportunidade de explorar e debater os assuntos, já que a construção do conhecimento deve ser vista como um processo contínuo e plausível de significado, permitindo o seu crescimento individual e social. Acreditamos que, de posse do conhecimento de vários conteúdos matemáticos, o indivíduo terá habilidade de contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, construir estratégias, comprovar e justificar resultados, argumentar logicamente, reconhecer formar geométricas no seu dia a dia, organizar e analisar criticamente informações, contribuindo, assim, para uma sociedade melhor (Cabral et al., 2019)

Segundo Vogado et al (2020), na educação básica, comumente o ensino da geometria limita-se à Geometria Euclidiana que está restrita a uma superfície plana, aprendemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180° e que, por um ponto externo a uma reta passa uma única reta paralela à reta dada. Mas essas afirmações são realmente verdadeiras? Os objetos e conceitos peculiares da Geometria Euclidiana que é limitado a uma superfície plana é apropriada para descrever o nosso mundo que é curvo como também mensurar distâncias intergalácticas ou subatômicas? Ela é a única ferramenta de estudo das formas geométricas presentes em nosso mundo físico?

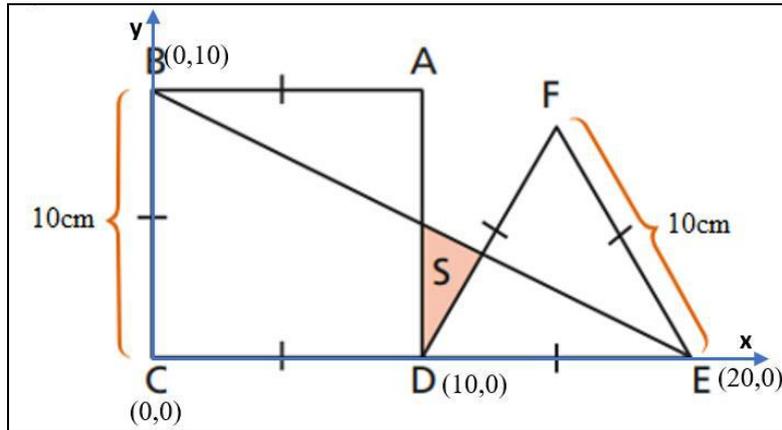
2. Metodologia

Este trabalho é uma investigação de diagnóstico e abordagem (quantitativa), O estudo envolveu uma abordagem quantitativa que utiliza métodos quantitativos, Pereira, et al. (2018), foi realizada considerando o período de 01 de maio de 2020 a 20 de março de 2021 de caráter exploratório.

Primeiramente colocamos os eixos coordenados, x e y conforme amostrado na Figura 1, a seguir, com a origem coincidindo com um determinado ponto, previamente escolhido, pode ser o início da figura ou outro ponto que favoreça na obtenção dos cálculos. Vamos realizar dois tipos de resolução, mostrando dessa forma que várias opções são possíveis, quando se faz a opção de utilizar a geometria analítica.

Após isso indicamos as coordenadas dos pontos escolhidos, como sendo os pontos principais, indicando a Origem (0,0), como sendo o início da obtenção do método a ser desenvolvido, onde pelos dados fornecidos já iríamos ter de forma automática, segue a resolução do tipo 1, Figura 1:

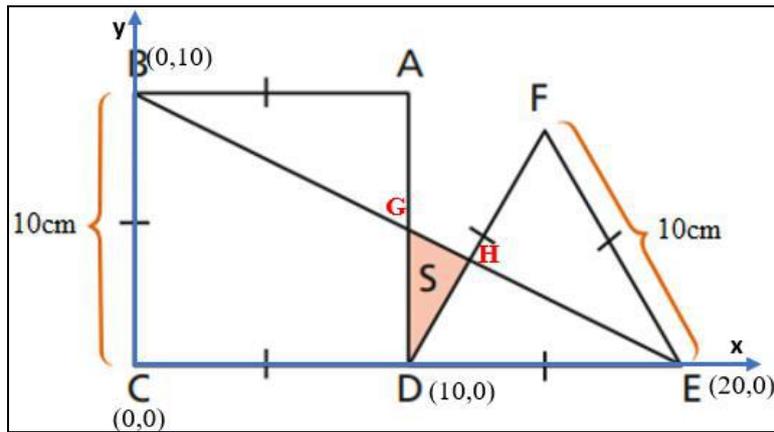
Figura 1: Figura com os eixos coordenados na origem sobre o ponto C, tipo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com a Figura 1, a reta BE, cruza com a reta AD e com a reta DF, formando pontos onde temos que descobrir as coordenadas, Figura 2:

Figura 2: Inserção dos pontos G e H na figura plana.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após isso calculamos a equação da reta BE, utilizando a forma segmentária da reta,

$$\frac{x}{P} + \frac{y}{Q} = 1$$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

Nestes casos, o objetivo é resolver os sistemas de equações formados com a reta AD e com a reta DF.

Reta AD:

$$x = 10$$

Reta DF:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \text{tg}60^\circ(x - 10)$$

$$y = \sqrt{3}(x - 10)$$

A equação utilizada acima é a do feixe de retas, onde depende de um ponto dado previamente e um ângulo, no caso o do triângulo equilátero que é de 60°.

Os sistemas serão:

$$(i) \begin{cases} \frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1 \\ x = 10 \end{cases}$$

Resolvendo, teremos:

$$\frac{10}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{10}{20} + \frac{y}{10} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{10}{20} + \frac{2y}{20} = \frac{20}{20}$$

$$10 + 2y = 20$$

$$2y = 20 - 10$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

Portanto, obtivemos o ponto G (10,5). Agora vamos para o 2º sistema de equações, a fim de calcularmos o ponto H:

$$(ii) \begin{cases} \frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1 \\ y = \sqrt{3}(x - 10) \end{cases}$$

Como y já aparece isolado, retornamos e substituímos na primeira equação, assim temos:

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{x}{20} + \frac{\sqrt{3}(x - 10)}{10} = 1$$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{x}{20} + \frac{2\sqrt{3}(x - 10)}{20} = \frac{20}{20}$$

$$x + 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = 20$$

$$(1 + 2\sqrt{3})x = 20 + 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{20(1 + \sqrt{3})}{(1 + 2\sqrt{3})}$$

Racionalizando o denominador obtemos:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{20(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - 2\sqrt{3})}{(1 + 2\sqrt{3}) \cdot (1 - 2\sqrt{3})} \\
 x &= \frac{20(1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2.3)}{1 - 4.3} \\
 x &= \frac{20(-5 - \sqrt{3})}{-11} \\
 x &= \frac{20(5 + \sqrt{3})}{11}
 \end{aligned}$$

Voltamos na equação $y = \sqrt{3}(x - 10)$ e calculamos o valor de y :

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{3}(x - 10) \\
 y &= \sqrt{3} \cdot \frac{20(5 + \sqrt{3})}{11} - 10\sqrt{3} \\
 y &= \frac{100\sqrt{3} + 60}{11} - 10\sqrt{3} \\
 y &= \frac{100\sqrt{3} + 60 - 110\sqrt{3}}{11} \\
 y &= \frac{60 - 10\sqrt{3}}{11}
 \end{aligned}$$

Portanto descobrimos o ponto H:

$$H\left(\frac{20(5 + \sqrt{3})}{11}, \frac{60 - 10\sqrt{3}}{11}\right)$$

Como temos os pontos D, G e H, vértices de um triângulo, vamos utilizar a relação da área de um triângulo para obter a área:

Segundo Dias, G. N. (2011), fazendo uma pequena alteração no determinante, uma vez que a última coluna é numericamente igual a 1, obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \quad (I)$$

Realizando a multiplicação dos elementos de cima para baixo, conforme a indicação abaixo, permanecendo o sinal e após isso debaixo para cima trocando o sinal obtemos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\
 A &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\
 A &= \frac{1}{2} |x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2| \quad (II)
 \end{aligned}$$

Agora fazendo debaixo para cima e trocando o sinal, obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

7

$$A = \frac{1}{2} |x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3| \quad (\text{III})$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 10 & 10 & x_1 \\ 0 & 5 & y_3 \\ & & y_1 \end{array} \right\|$$

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} 10 & 10 & \frac{20(5+\sqrt{3})}{11} \\ 0 & 5 & \frac{60-10\sqrt{3}}{11} \\ & & 10 \end{array} \right\|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| 50 + \frac{600-100\sqrt{3}}{11} - \frac{500+100\sqrt{3}}{11} - \frac{600-100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| 50 + \frac{600-100\sqrt{3}-500-100\sqrt{3}-600+100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| 50 - \frac{500+100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \frac{550-500-100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \frac{50-100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{100\sqrt{3}-50}{22}$$

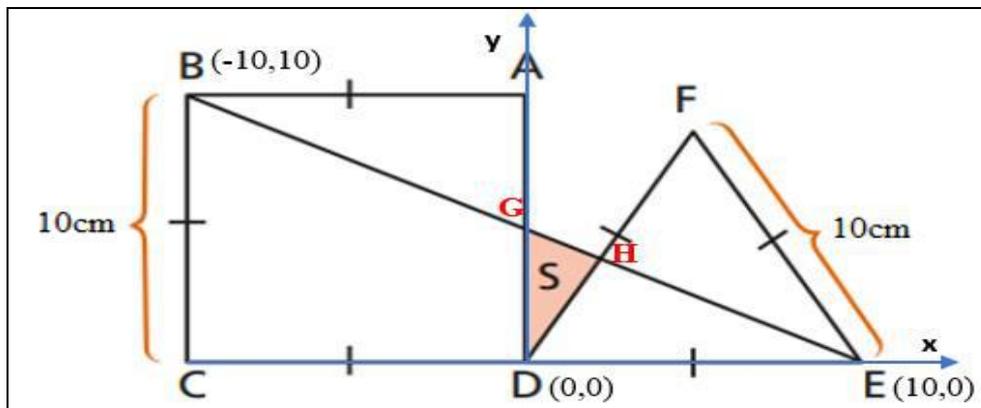
$$A = \frac{50}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11} \right)$$

$$A = 25 \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11} \right)$$

Lehmann (1988), comenta que os eixos cartesianos podem ser deslocados de modo a favorecer os cálculos de uma forma mais simples e que forneça pontos e retas mais simples e adequados.

Uma outra forma de fazer, utilizando ainda a Geometria Analítica, é deslocar o eixo y, conforme a Figura 3, pois dessa maneira teremos pontos mais simples e retas mais adequadas. Resolução tipo 2:

Figura 3: Figura com os eixos cartesianos deslocados com a origem para o ponto D. Resolução tipo 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim temos a reta AD, que é $x = 0$ e a reta DF,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \operatorname{tg}60^\circ(x - 0)$$

$$y = \sqrt{3}(x)$$

Então os pontos G e H seriam o cruzamento com a reta BE.

Realizando a obtenção da reta BE, temos:

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0, \text{ então temos:}$$

$$\begin{vmatrix} x & -10 & 10 & x \\ y & 10 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & -10 & 10 & x \\ y & 10 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

Fazendo a multiplicação de cima para baixo:

$$10x - 10 \cdot 0 + 10y \dots$$

$$\begin{vmatrix} x & -10 & 10 & x \\ y & 10 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

Completando o cálculo, fazendo a multiplicação de baixo para cima:

$$10x - 10 \cdot 0 + 10y - (-10y + 10 \cdot 10 + x \cdot 0) = 0, \text{ temos:}$$

$$10x + 10y + 10y - 100 = 0, \text{ dividindo por } 10, \text{ temos:}$$

$$x + 2y = 10, \text{ calculando a segmentária, dividindo todos os termos por } 10, \text{ temos:}$$

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

Obtenção do ponto G:

$$\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Como $x = 0$, substituindo na equação acima, temos:

$$\frac{0}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

$$y = 5$$

Portanto o ponto G(0,5).

Fazendo os cálculos do ponto H, intersecção da reta BE com DF:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}(x) \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª temos:

$$\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{3}x}{5} = 1$$

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{x}{10} + \frac{2\sqrt{3}x}{10} = \frac{10}{10}$$

$$(1 + 2\sqrt{3})x = 10$$

$$x = \frac{10}{1 + 2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{10 \cdot (1 - 2\sqrt{3})}{(1 + 2\sqrt{3}) \cdot (1 - 2\sqrt{3})}$$

$$x = \frac{10(1 - 2\sqrt{3})}{1 - 12}$$

$$x = \frac{10(1 - 2\sqrt{3})}{-11}$$

$$x = \frac{10(2\sqrt{3} - 1)}{11}$$

Retornando na 1ª equação, temos:

$$y = \sqrt{3}(x)$$

$$y = \sqrt{3} \cdot \frac{10(2\sqrt{3} - 1)}{11}$$

$$y = \frac{10(2 \cdot 3 - \sqrt{3})}{11}$$

$$y = \frac{10(6 - \sqrt{3})}{11}$$

Obteremos o ponto H

$$H\left(\frac{10(2\sqrt{3} - 1)}{11}, \frac{10(6 - \sqrt{3})}{11}\right)$$

Vamos calcular o valor do lado DG e o lado DH do triângulo DGH, através da distância entre dois pontos analiticamente:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Utilizando a relação analítica para obtermos a distância entre os pontos D e G, temos:

$$d_{DG} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = 5$$

Fazendo uso da mesma relação para calcular a distância entre os pontos D e H, temos:

$$d_{DH} = \sqrt{\left(\frac{10(2\sqrt{3} - 1)}{11} - 0\right)^2 + \left(\frac{10(6 - \sqrt{3})}{11} - 0\right)^2}$$

$$d_{DH} = \sqrt{\frac{100(4 \cdot 3 - 4\sqrt{3} + 1) + 100(36 - 12\sqrt{3} + 3)}{121}}$$

$$d_{DH} = \sqrt{\frac{100(13 - 4\sqrt{3} + 39 - 12\sqrt{3})}{121}}$$

$$d_{DH} = \frac{10}{11} \sqrt{52 - 16\sqrt{3}}$$

$$d_{DH} = \frac{10}{11} \sqrt{4(13 - 4\sqrt{3})}$$

$$d_{DH} = \frac{20}{11} \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$$

Simplificando o radical:

$$\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}, \text{ temos:}$$

$$\sqrt{13 - 3\sqrt{3}} = \sqrt{13 - \sqrt{48}}$$

Utilizando o conceito de radical duplo, segundo Tizziotti (1990), temos:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Onde $c = \sqrt{A^2 - B}$, isto posto, temos:

$$c = \sqrt{13^2 - 48} = \sqrt{121} = 11$$

$$d_{DH} = \frac{20}{11} \left(\sqrt{\frac{13+11}{2}} - \sqrt{\frac{13-11}{2}} \right)$$

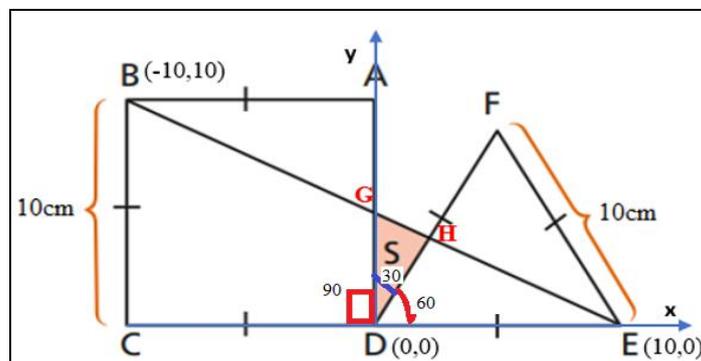
$$d_{DH} = \frac{20}{11} \left(\sqrt{\frac{24}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} \right)$$

$$d_{DH} = \frac{20}{11} (\sqrt{12} - 1)$$

$$d_{DH} = \frac{20}{11} (2\sqrt{3} - 1)$$

Observando a região S, da Figura 4, vemos que já foram inseridos os ângulos e pontos, temos:

Figura 4: Transposição da origem para o ponto D, e formação dos ângulos de S.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o ângulo formado entre os lados DG e DH do triângulo DGH equivale a 30°. Portanto utilizando a relação da área de um triângulo formado por dois lados e um ângulo compreendido entre os lados, segundo IEZZI (2013), temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{DG} \cdot \overline{DH} \cdot \text{sen}30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{20}{11} (2\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{100}{4 \cdot 11} (2\sqrt{3} - 1)$$

$$A = \frac{25(2\sqrt{3} - 1)}{11}$$

Confrontando a resolução analítica com a plana, abaixo temos a solução, com a utilização da geometria plana, segundo Iezzi (2013), para tanto temos a Figura 5:

Figura 5: Demonstração do cálculo da área por geometria plana.

$\triangle ABG \equiv \triangle DEG \text{ (LAA}_0\text{)} \Rightarrow DG = \frac{a}{2}$

$S_1 + S_2 = a^2$
 $S_2 + S + S_3 = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_1 + S_2 = S_2 + S + S_3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = S_1 - S_3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \frac{a^2}{4} - \frac{a \cdot x \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} \text{ (1)}$

$S = \frac{\frac{a}{2} \cdot x \cdot \text{sen } 30^\circ}{2} \Rightarrow x = \frac{4S}{a \text{ sen } 30^\circ} \text{ (2)}$

Substituindo (2) em (1):

$S = \frac{a^2}{4} - \frac{a \cdot \frac{4S}{a \text{ sen } 30^\circ} \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2}{4} - 2\sqrt{3}S \Rightarrow$
 $\Rightarrow S(1 + 2\sqrt{3}) = \frac{a^2}{4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \frac{2\sqrt{3} - 1}{44} \cdot a^2$

Fonte: IEZZI (2013).

Obs.:

Como "a" foi adotado como 10 cm, temos:

$$s = \frac{2\sqrt{3} - 1}{44} \cdot (10)^2$$

$$s = 100 \cdot \frac{2\sqrt{3} - 1}{44}$$

$$s = \frac{50\sqrt{3} - 25}{11}$$

$$s = \frac{25(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

3. Resultados e Discussões

A proposta é resolver alguns exemplos por geometria analítica a fim de utilização de forma mais ampla e irrestrita as questões propostas, sugerindo também a ideia inicial do uso analítico das ferramentas que fazem parte do processo.

Chaquiam, et al, (2020), afirma que a maioria dos professores ainda usa o método de ensino por meio da explicação do conteúdo iniciando pelos conceitos, exemplos, exercícios resolvidos e exercícios do livro, essa metodologia se aproxima muito da “tradicional” que prioriza o repasse do conhecimento.

Portanto, temos que criar situações novas onde coloquemos o aluno a pensar e refletir sobre as novas propostas de problemas e os novos desafios que podem ser criados.

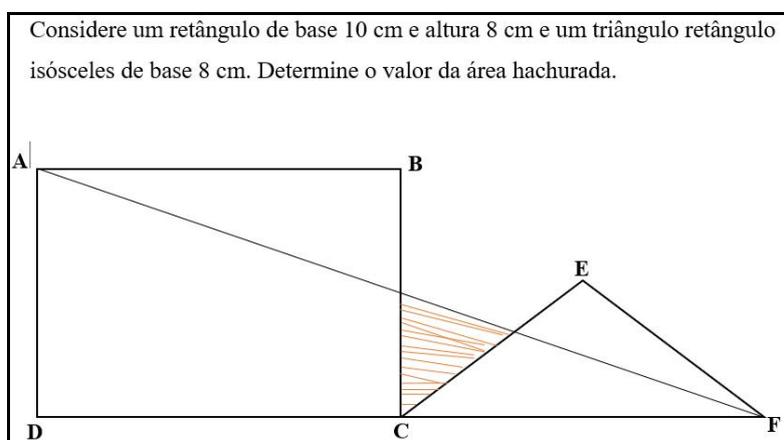
Para Vogado, et al (2020), é imprescindível criar situações que provoquem e desafiem os alunos, com isso destacamos a atuação do professor como mediador do processo que deve, por meio de alternativas metodológicas, usar a seu favor o interesse do aluno para propiciar a eles a informação de modo que consigam um desenvolvimento educacional pleno.

O aluno hoje de certa forma está um pouco distante da resolução de listas de exercícios específicas com um foco em um determinado assunto, A geometria exige o desenvolvimento do raciocínio, isso ocorre com a resolução de atividades e exercícios, pouco cobrada nas escolas de uma forma individualizada, onde questões são propostas a todos e apenas um determinado grupo resolve e os demais copiam.

Na concepção de Saraiva, et al (2021), as dificuldades impostas pelos exames vestibulares são inúmeras no mundo da concorrência por uma vaga. Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM, propõe um tempo de cerca de três minutos para resolução de questões propostas a um item. A dificuldade vai muito além das habilidades em saber o conteúdo correto; é necessária muita concentração, rapidez nos cálculos e interpretação racional das questões para que se possa resolver em apenas três minutos o item.

Abaixo segue a Figura 6, exemplificando os as atividades de geometria plana, com resolução através da geometria analítica, questão inédita, proposta pelos autores:

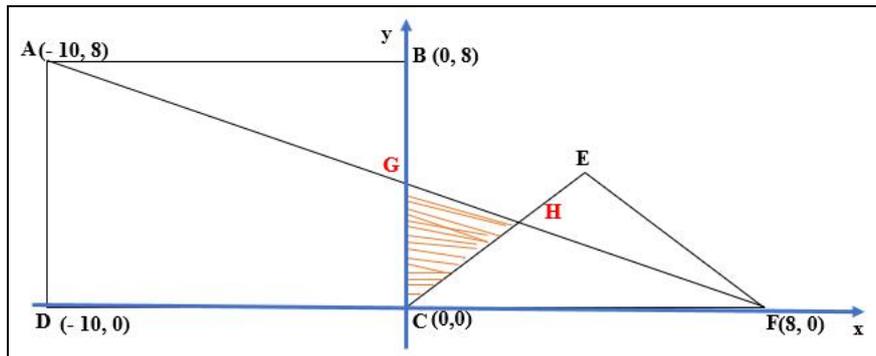
Figura 6: Exemplo de aplicação envolvendo os conceitos de geometria analítica.



Fonte: Dados autores.

A seguir, dispomos a solução proposta, com a utilização dos conceitos de geometria analítica, conforme Figura 7: Solução.

Figura 7: Imagem contendo os eixos cartesianos e pontos notáveis.



Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre as opções de colocação dos eixos cartesianos, temos a de inserir a origem no ponto C, figura 07 acima. Assim temos a reta BC, que é $x = 0$ e a reta CE,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \text{tg}45^\circ(x - 0)$$

$$y = (x)$$

Então os pontos G e H seriam o cruzamento com a reta AF.

Realizando a obtenção da reta AF, temos:

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0, \text{ então temos:}$$

$$\begin{vmatrix} x & -10 & 8 & x \\ y & 8 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, temos:

Completando o cálculo, fazendo a multiplicação de baixo para cima:

$$8x - 10.0 + 8y - (-10y + 8.8 + x.0) = 0, \text{ temos:}$$

$$8x + 8y + 10y - 64 = 0, \text{ dividindo por 2, temos:}$$

$$4x + 9y = 32,$$

Obtenção do ponto G:

$$\begin{cases} 4x + 9y = 32 \\ x = 0 \end{cases}$$

Como $x = 0$, substituindo na equação acima, temos:

$$y = \frac{32}{9}$$

Portanto o ponto G $(0, \frac{32}{9})$.

Fazendo os cálculos do ponto H, intersecção da reta BE com DF:

$$\begin{cases} y = (x) \\ 4x + 9y = 32 \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª temos:

$$4x + 9x = 32$$

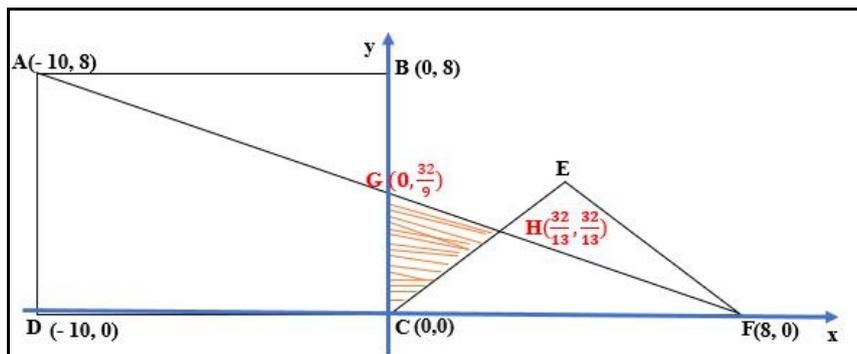
$$13x = 32$$

$$x = \frac{32}{13}$$

$$H\left(\frac{32}{13}, \frac{32}{13}\right)$$

Segue abaixo a Figura 8, com os pontos de intersecção e suas coordenadas:

Figura 8: Imagem contendo os pontos de intersecção.



Fonte: Dados da pesquisa.

Calculando a área delimitada pelo triângulo CGH, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C & x_G & x_H & x_C \\ y_C & y_G & y_H & y_C \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{32}{13} & 0 \\ 0 & \frac{32}{9} & \frac{32}{13} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

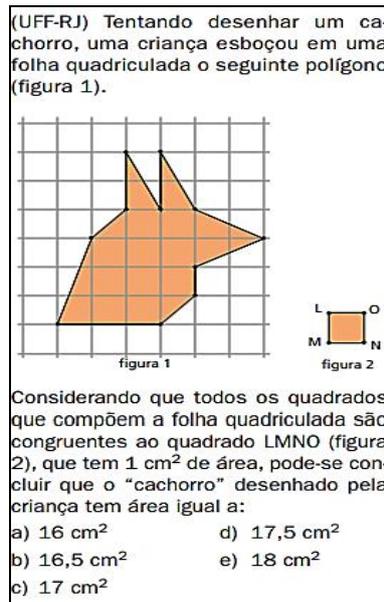
$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{32}{9} \cdot \frac{32}{13} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1024}{117}$$

$$A = \frac{512}{117}$$

Segue a Figura 9, questão proposta em geometria plana, e com resolução para a geometria analítica:

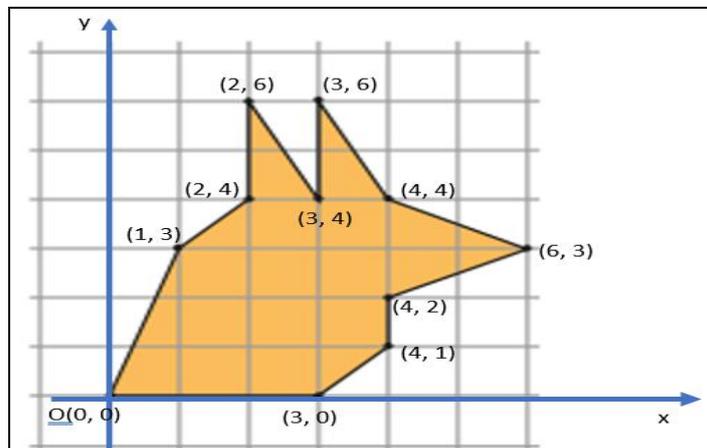
Figura 9: Questão proposta de geometria com resolução por geometria analítica.



Fonte: IEZZI (2013).

Abaixo, segue a Figura 10, com a colocação dos eixos cartesianos e dos pontos cartesianas, adequando a posição dos pontos, utilizando a teoria da geometria analítica para responder ao problema de uma forma mais simples. A simplicidade não está nos cálculos e sim na ideia que permanece a mesma desde o início da proposta de resolução:

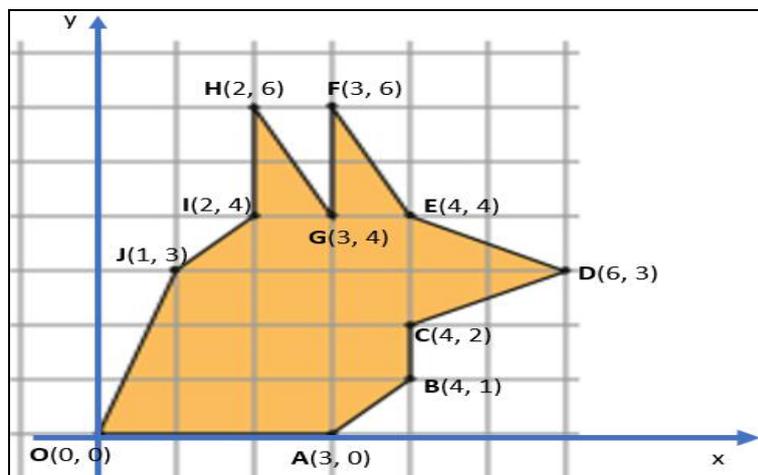
Figura 10: Imagem colocando os eixos cartesianos e os pontos de acordo com a posição dos pontos em relação a origem.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir temos a Figura 11, com a colocação em ordem dos pontos, ou sentido horário ou anti horário. Neste caso adotou-se o sentido anti-horário, sendo indiferente a escolha, com a nomeação em ordem alfabética.

Figura 11: Imagem colocando os eixos cartesianos e os pontos com a adoção do sentido anti-horário dos pontos em ordem alfabética.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir calculamos o determinante, através da relação da área, em geometria analítica, Lehman (1988), adaptada por Dias (2011):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_o & x_A & x_B & x_C & x_D & x_E & x_F & x_G & x_H & x_I & x_J & x_o \\ y_o & y_A & y_B & y_C & y_D & y_E & y_F & y_G & y_H & y_I & y_J & y_o \end{vmatrix}$$

A seguir colocamos os pontos de acordo com a Figura 10:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Na sequência calculamos o determinante, fazendo o produto dos elementos de cima para baixo e após isso de baixo para cima, somando, de acordo com Dias (2011):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |0 + 3 + 8 + 12 + 24 + 24 + 12 + 18 + 8 + 6 + 0 - (\dots\dots\dots)|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |0 + 3 + 8 + 12 + 24 + 24 + 12 + 18 + 8 + 6 + 0 - (4 + 12 + 12 + 12 + 18 + 8 + 12 + 4)|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |115 - 82|$$

$$A = 16,5\text{cm}^2$$

LETRA B

4. Considerações Finais

Com a utilização da geometria analítica como recurso de resolução de questões em Geometria Plana, certamente uma evolução sem barreiras poderá ocorrer no desenvolvimento do raciocínio dedutivo e compreensão do aluno.

O fato é que quando colocamos os eixos cartesianos na figura proposta, a saída e resposta acontecem automaticamente de forma natural, sem a necessidade de interpretação e de rotação de figuras ou transposição de outras formas geométricas a fim de se comparar, ou até mesmo achar formas semelhantes que expresse a proporcionalidade a ser questionada.

Este trabalho, incita o professor de matemática a expor a seus alunos mais esta forma como atividade ou como exercícios a fim de que a reflexão sobre o problema traga situações em que o raciocínio rápido se complete sem necessidade de retorno aos conceitos antigos da geometria.

Segundo, Ferreira et al (2021), a interação entre professor/aluno e aluno/aluno é interessante para possibilitar inovações e aperfeiçoamento de métodos e técnicas de ensino, por vezes esquecidos e inúteis, e por um momento torna-se crucial para o desenvolvimento da ideia central do problema. O professor não pode considerar-se toda a fonte de conhecimento e existência na sala de aula; muitas vezes um absurdo e ideia absurda torna-se plausível de outro ponto de vista do conhecimento, importando naquele momento o crescimento intelectual e o desenvolvimento de novas ideias e métodos aplicados

A comparação do método com a resolução através da geometria plana é necessária a fim de se tirar conclusões acerca do que é mais vantajoso para o seu entendimento de uma forma mais clara e óbvia do raciocínio dedutivo sobre a questão a ser desenvolvida.

O estudo abre perspectivas a novas pesquisas a respeito da utilização desta metodologia na resolução de questões de geometria plana. Inúmeros problemas podem ser analisados e construídos observando este novo modelo de interpretação.

Referências

- Brasil (1996). Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. 20 de dezembro de 1996.
- Brasil. (2002). Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. MEC, SEMTEC
- Boyer, C. B. (2012). História da Matemática. Tradução de Helena Castro, Ed. Blücher Ltda.
- Cabral, N. F., Chaquiam, M., Pock, M.A. & Dias, G. N. (2020). UARC: Um Organizador de Sequência Didática na Área de Matemática. *Braz. J. of Develop.*, 6(6), 34191-34208. [10.34117/bjdv6n6-098](https://doi.org/10.34117/bjdv6n6-098).
- Cabral, N. F., Dias G. N. & Lobato Júnior, J. M. S. (2019). O ensino de razão e proporção por meio de atividades. *Ensino da Matemática em Debate*. 6(3), 155-179. <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2019v6i3p155-179>.
- Chaquiam, M., Maués, D. D. N., Cabral, N. F., Dias, G. N., Rodrigues, A. P. & Pamplona, V. M. S., (2020). A percepção de alunos e professores sobre o ensino e aprendizagem do cilindro circular reto. *Research, Society and Development*, 9(9). <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i9.8110>.
- Chevallard, Y. (1986). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Ed. Colomb Jacques. 89-91
- Dias, G. N. (2011) Práticas do Ensino da Matemática: a realidade da sala de aula / Gustavo Nogueira Dias. - Belém, Pará
- Dias, G. N., Silva, P. R. S., Pamplona, V. M. S., Araújo, J. C. O., Barbosa, E. S., Lobato, F. S., Souza Junior, J. C. B., Silva Junior, W. L. P., Vogado, G. E. R., Barreto, W. D. L., Leal, A. P. I., Silva Junior, A. F. & Pinto, G. P. (2021) A utilização do Formulários Google como ferramenta de avaliação no processo de ensino e aprendizagem em tempos de pandemia de Covid-19: Um estudo em uma escola de educação básica. *Research, Society and Development*, 10(4). <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i4.14180>
- Ferreira, R. S., Araújo, M. B. S., Araújo, G. M., Dias, G. N., Souza Junior, J. C. B., Lobato, F. S., Vogado, G. E. R., Pamplona, V. M. S., Rodrigues, A. E., Reis, C. P., Silva Junior, W. L. P., Barbosa, E. S., Beirão, A. T. M. & Silva, K. P. (2021). A didactic proposal for the construction of the ellipse. *International Journal for Innovation Education and Research*, 9(6).
- Iezzi, G. (1993). *Fundamentos da Matemática Elementar*. 4, Ed. Atual
- Iezzi, G. (2013). *Fundamentos de matemática elementar*. 7, Geometria analítica / Gelson Iezzi, (6a ed.), Atual.
- Lehmann, C. H. (1988). *Geometria Analítica*. (9a ed.), ed. Globo.
- Pereira, A. S., et al. (2018). *Metodologia da pesquisa científica*. UFSM.

Pinheiro, A.C. S., Alves F. J. C., Dias, G. N., Beirão, A. T. M., Silva, K. P., Vogado, G. E. R., Barreto, W. D. L., Loureiro, R. C., Reis, N. D. M. & Rocha, H. O. (2021). O ensino de função polinomial do 1º grau por construção de aplicativos utilizando de recursos da informática educativa com APP inventor: uma análise semiótica. *International Journal of Development Research* 11(9), 50325-50331, <https://doi.org/10.37118/ijdr.22846.09.2021>.

Saraiva, O. W. M., Dias, G. N., Lobato, F. S., Barbosa, E. S., Vogado, G. E. R., Silva, K. P., Beirão, A. T.M., Reis, N. D. M., Flor, R. P. Rocha, H. O. & Reis, C. P. (2021). Ternas pitagóricas suas relações e aplicações na Álgebra e na Geometria. *Research, Society and Development*, 10(13). <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i13.21391>.

Secco, L. C. M., Cabral, N. F., Chaquiam, M., Dias, G. N., Pamplona, V. M. S., Reis, C. P., Costa, E. G. & Pinto, G. P. (2020) O ensino de juros compostos por meio de sequências didáticas. *Research, Society And Development*, 9, e17691211068

Tizzotti, J. G. (1990). Matemática, segundo Grau, Vestibular. (5a ed.). Editora Ática, São Paulo.

Vogado, G. E. R., Lobato, F. S., Dias, G. N., Pamplona V. M. S., Rodrigues, A. E., Rocha, H. O., Souza Junior, J. C. B., Barreto, W. D. L., Silva, P. R. S. & Silva Junior, W. L. (2020). Ensino-aprendizagem de Matemática: Análise dos aspectos Social, Metodológicos e Avaliativo dos Discentes do 3º ano do Ensino Médio. *Research, Society and Development*, 9(11). <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i11.10076>.

Vogado, G. E. R., Lobato, F. S., Dias, G. N., Barreto, W. D. L., Silva Junior, W. L., Pamplona, V. M. S., Rodrigues, A. E., Araújo, J. C. O., Barbosa, E. S. & Silva, E. S. (2020). A geometria hiperbólica e o reflexo de sua utilização para alunos do Ensino Médio. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*. 3, 99-118. <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica>, 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica.