

Análise de uma escada reta autoportante em concreto armado através dos modelos analítico e numérico via Método dos Elementos Finitos

Analysis of a straight free-standing stair in reinforced concrete through analytical and numerical models via Finite Element Method

Análisis de una escalera recta autoportante de hormigón armado mediante modelos analítico y numérico mediante el Método de Elementos Finitos

Recebido: 24/05/2022 | Revisado: 09/06/2022 | Aceito: 10/06/2022 | Publicado: 19/06/2022

Jônatas Gomes Mafaldo

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6372-205X>
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: jonatasmafaldo@gmail.com

José Neres da Silva Filho

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9138-1771>
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: jneres@ect.ufrn.br

Karen Andreza Marcelino

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6935-9316>
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: karen.marcelino.106@ufrn.edu.br

Daniel Nelson Maciel

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3971-4724>
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: dnmaciell@ect.ufrn.br

Pedro Mitzcun Coutinho

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9764-267X>
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: pedromitzcun@gmail.com

Resumo

As escadas especiais conquistaram maior espaço em projetos estruturais nos últimos tempos. Os modelos estruturais de cálculo destas escadas devem retratar o comportamento na ruptura (ELU) e em serviço (ELS), podendo ser gerados através de modelos analíticos simplificados ou com o emprego de métodos numéricos. Nesta perspectiva, este artigo apresenta a análise de escadas retas autoportantes em concreto armado a partir da variação de espessura da laje e da obtenção dos esforços normais de flexão e das deformações. Para tanto, foram utilizados os métodos analíticos de Knijnik & Tavares (1977) e o apresentado por Araújo (2014), assim como o Método dos Elementos Finitos (MEF), com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000®. Foram avaliados modelos computacionais compostos por elementos de barra e de casca. A partir das simulações realizadas, observou-se uma aproximação satisfatória entre os modelos analíticos e os modelos numéricos com elementos de casca, enquanto os modelos formados por elementos de barra apresentaram momentos fletores negativos superiores àqueles observados nos outros dois modelos. Ademais, pode-se verificar, através dos modelos com elementos de casca, na região central do patamar próxima aos lances, a existência de pontos de concentração de momentos fletores, indicando a necessidade de uma armadura complementar nesta região. Por fim, observou-se que, para menores espessuras, o método analítico apresentou maiores deformações, seguido do modelo numérico formado por elementos de barra e, por último, o modelo com elementos de casca. Contudo, à medida que houve o aumento da espessura, houve convergência de resultados entre os modelos analíticos e numéricos analisados.

Palavras-chave: Escadas autoportante retas; Métodos dos Elementos Finitos; Momento fletor; Deformações.

Abstract

Special stairs have gained more space in structural projects in recent times. The calculation structural models used for these stairs must portray the behavior at failure (ELU) and in service (ELS) and can be generated through simplified analytical models or with the use of numerical methods. In this perspective, this article presents the analysis of free-standing stairs in reinforced concrete through slab thickness variation and the obtainment of normal bending forces and deformations. For that, the analytical methods of Knijnik & Tavares (1977) and Araújo (2014) were used, as well as the Finite Element Method (FEM), with the help of the structural analysis program SAP2000®. Computational models composed by bar and shell elements were evaluated. From the simulations carried out, a satisfactory

approximation between the analytical and numerical models with shell elements was observed, while the models formed by bar elements presented negative bending moments higher than those observed in the other two models. Furthermore, it can be verified, through the models with shell elements, in the central region of the landing next to the flights, the existence of bending moments concentration points, indicating the need for a complementary reinforcement in this region. Finally, it was observed that, for smaller thicknesses, the analytical method presented greater deformations, followed by the numerical model formed by bar elements and, finally, the model with shell elements. However, as the thickness increased, there was convergence of results between the analytical and numerical models analyzed.

Keywords: Free-standing stairs; Finite Element Method; Bending moment; Deformations.

Resumen

Las escaleras especiales han ganado más espacio en los proyectos estructurales en los últimos tiempos. Los modelos estructurales de cálculo de estas escaleras deben representar el comportamiento a falla (ELU) y en servicio (ELS), y pueden generarse a través de modelos analíticos simplificados o con el uso de métodos numéricos. En esta perspectiva, este artículo presenta el análisis de escaleras rectas autoportantes de hormigón armado a partir de la variación del espesor de la losa y la obtención de los esfuerzos normales de flexión y deformaciones. Para eso, se utilizaron los métodos analíticos de Knijnik & Tavares (1977) y Araújo (2014), así como el Método de los Elementos Finitos (FEM), con la ayuda del programa de análisis estructural SAP2000®. Se evaluaron modelos computacionales compuestos por elementos de barra y caparazón. De las simulaciones realizadas se observó una aproximación satisfactoria entre los modelos analíticos y los modelos numéricos con elementos de lámina, mientras que los modelos formados por elementos de barra presentaron momentos flectores negativos superiores a los observados en los otros dos modelos. Además, se puede verificar, a través de los modelos con elementos envolventes, en la región central del rellano junto a los tramos, la existencia de puntos de concentración de momentos flectores, indicando la necesidad de un refuerzo complementario en esta región. Finalmente, se observó que, para espesores menores, el método analítico presentó mayores deformaciones, seguido del modelo numérico formado por elementos de barra y, por último, el modelo con elementos de concha. Sin embargo, como hubo un aumento de espesor, hubo convergencia de resultados entre los modelos analíticos y numéricos analizados.

Palabras clave: Escaleras rectas autoportantes; Métodos de Elementos Finitos; Momento de flexión; Deformaciones.

1. Introdução

Uma etapa fundamental no projeto de edifícios em concreto armado é a concepção estrutural. As escadas são importantes elementos estruturais que compõem os edifícios, projetados e executados para unir, por meio de degraus sucessivos, de maneira confortável e sem que haja grande gasto de energia, os diferentes níveis de uma edificação. Contudo, observam-se, na fase de execução das obras, dificuldades na construção das escadas devido ao sistema estrutural adotado e ao posicionamento da armação. Ademais, o processo de concretagem demanda um tempo considerável, bem como cuidados especiais, principalmente para que não ocorra a segregação do concreto durante o seu lançamento nas formas.

Os modelos estruturais para os cálculos desses elementos especiais devem ser eficientes, a fim de retratar o seu comportamento estrutural na ruptura (ELU) e em serviço (ELS). Vale ressaltar que tais modelos podem ser gerados de maneiras mais simples, através de modelos analíticos simplificados, ou mais complexos, com o emprego de modelos estruturais mais arrojados, por meio de métodos numéricos. Contudo, não se pode, a priori, afirmar a melhor ou maior eficiência de um ou outro, mas sim entender que cada modelo tem características próprias, sendo sua utilização baseada na resposta que se pretende obter da estrutura. Vale salientar que a escolha do melhor tipo de escada depende de vários fatores, que vão desde a escolha do material até suas características geométricas e de funcionalidade (Bangash & Bangash, 1999).

Devido às formas não convencionais e ao fato de serem destaque do ponto de vista arquitetônico, as escadas especiais passaram a ter mais espaço nas construções com o decorrer do tempo, tendo como exemplo as escadas autoportantes retas, curvas e helicoidais (Azambuja, 1962; Hussain, 2001).

Segundo Knijnik e Tavares (1977), o fato de não necessitarem de estruturas auxiliares para sustentação faz com que este tipo de escada se apresente como a solução ideal, tanto em termos de funcionalidade, como sob o ponto de vista estético. Entretanto, devido à complexidade do processo de dimensionamento, estas escadas demandam um trabalho especializado, no qual o calculista precisa ter o conhecimento e a experiência necessários para a análise dos esforços internos gerados e para o

dimensionamento, a fim de que sejam garantidas a segurança e a economia dos elementos estruturais.

Neste contexto, este artigo possui como objetivo realizar a análise dos momentos fletores e deformações de escadas autoportantes, obtidos a partir de modelos analíticos clássicos e numéricos – este por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) –, utilizando, para este último caso, o programa de análise estrutural SAP2000®.

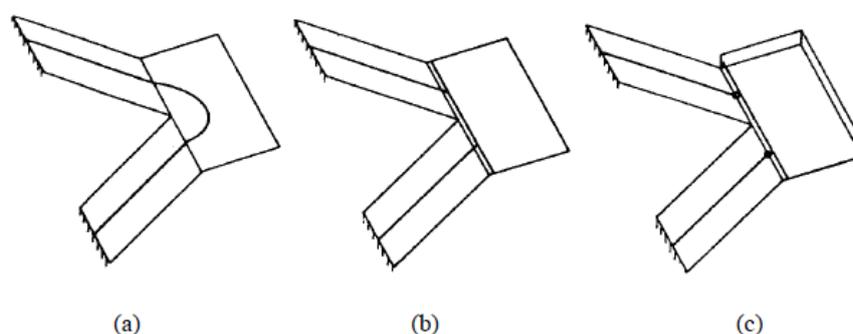
2. Escadas Autoportantes

As escadas autoportantes são aquelas que não necessitam de apoio intermediário, apoiando-se somente nas vigas situadas nos pisos do edifício. Os tipos mais comuns destas escadas são aqueles formados por dois lances com um patamar intermediário. Por não serem elementos tão simples, é necessária a utilização de modelos estruturais adequados para representá-los, no que diz respeito ao comportamento diante das cargas atuantes. Existem diversos modelos para aplicar a esta representação, desde os mais simples, até os mais complexos. Portanto, é primordial o estudo das características da estrutura em análise (Oliveira, 2008).

Inicialmente, os autores analisavam escadas por meio de aproximações, com modelos de barras espaciais. Nesta linha de estudo está Fuchssteiner (1954), que fez um modelo para escadas retas e helicoidais. Outros estudos semelhantes foram desenvolvidos por Cusens e Kuang (1966), Gould (1963), Sauter (1964) e Taleb (1964). Knijnik e Tavares (1977) reproduziram o trabalho de Cusens e Kuang (1966), transformando a formulação em um conjunto de tabelas para facilitar a obtenção dos resultados.

A Figura 1 mostra alguns exemplos desses estudos. Fuchssteiner (1957 apud Knijnik; Tavares, 1977) simplificou a escada como duas barras retas inclinadas unidas por uma barra curva, enquanto Cusens e Kuang (1966 apud Knijnik; Tavares, 1977) propuseram uma aproximação por meio de duas barras inclinadas unidas por uma barra reta no encontro dos lances com o patamar. Já Guerrin e Lavaur (1968 apud Knijnik; Tavares, 1977) propuseram que as barras inclinadas fossem articuladas nos encontros com o patamar, sendo este rígido o suficiente para evitar deformações.

Figura 1 – Modelos estruturais de (a) Fchssteiner, (b) Cusens & Kuang e (c) Guerrin.



Fonte: Autores.

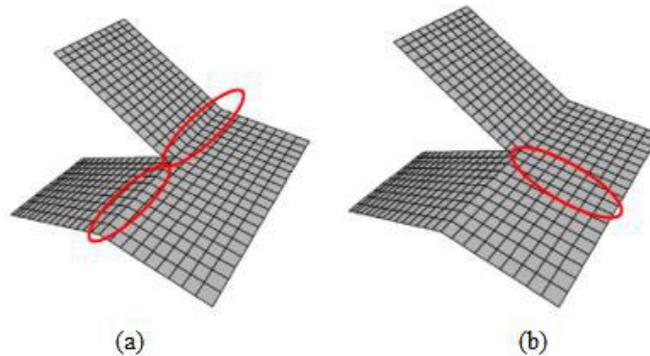
2.1 Análise do comportamento estrutural

As escadas autoportantes apresentam um funcionamento típico que não é evidente em escadas apoiadas. Por não possuírem apoio intermediário, o elemento apresenta uma tendência à rotação e, assim, de acordo com os trabalhos de Chriss, et al., (1966) e Cusens e Kuang (1966 apud Knijnik; Tavares, 1977), a fissuração inicial é proveniente dos esforços torcionais. Estas fissuras aparecem com uma carga ligeiramente superior ao dobro da carga de projeto e são diagonais, localizadas no apoio inferior do lance descendente da escada. Logo, com o acréscimo de carga, aparecem fissuras na interseção do lance inferior com o patamar e na junção com o lance superior, sendo a ruptura final localizada ao longo da linha entre lance e

patamar.

A partir dos estudos anteriores, Knijnik e Tavares (1977) também verificaram que há concentração de tensões na chamada “bomba” da escada, localizada entre as faces internas dos lances. Foi constatado o aparecimento de fissuras neste local, aproximadamente perpendiculares à linha de intersecção do patamar com os lances. Tais fissuras apresentavam aberturas consideráveis junto aos lances e, à medida que se dirigiam à face externa do patamar, iam reduzindo significativamente. A Figura 2 mostra as localizações das fissuras.

Figura 2 – Localização das fissuras: (a) intersecção dos lances com patamar e (b) bomba da escada.



Fonte: Autores.

2.2 Obtenção de esforços

Para a obtenção dos esforços de dimensionamento de uma escada autoportante, algumas considerações, simplificações e métodos de cálculo analíticos e numéricos podem ser aplicados. Nestes casos, as escadas são tratadas como estruturas compostas por: (a) lajes isoladas cujos esforços internos são obtidos através da Teoria de Placas, por meio da resolução da equação diferencial de quarta ordem não homogênea de Lagrange; (b) método simplificado apresentado por Araújo (2014); (c) método simplificado de Knijnik e Tavares (1977); e (d) métodos numéricos via MEF.

2.2.1 Obtenção de esforços de flexão pela teoria de Kirchhoff

Os momentos fletores podem ser, basicamente, obtidos pelo método elástico, por meio da teoria clássica de Placas Delgadas (Teoria de Kirchhoff), que supõe material homogêneo, isotrópico, elástico, linear e desconsidera a deformabilidade por esforço cortante. Considerando o equilíbrio de forças e momentos e as relações entre deslocamentos e deformações, obtém-se a equação fundamental que rege o problema de placas: a equação diferencial de quarta ordem, não homogênea, de Lagrange (Equação 1).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (\text{Eq. 1})$$

Em que:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{rigidez flexional da placa;}$$

W – função de deslocamento vertical;

P – carga total uniformemente distribuída;

D – rigidez da placa à flexão;

E – módulo de elasticidade;

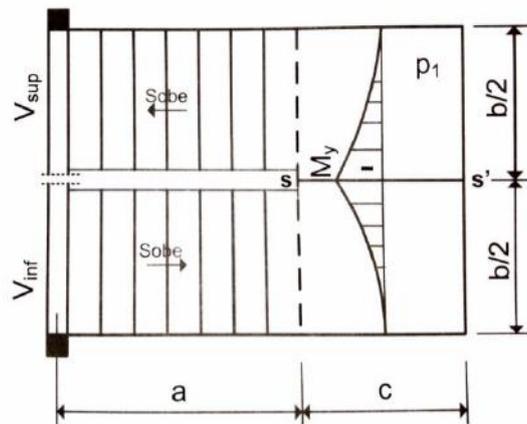
H – espessura da placa;

ν – coeficiente de Poisson.

2.2.2 Obtenção de esforços de flexão pelo método simplificado apresentado por Araújo (2014)

A partir da análise apresentada por Araújo (2014), para projetos de escadas autoportantes, é possível realizar um cálculo simplificado para a obtenção de esforços de flexão. De acordo com o autor, os momentos fletores médios no patamar, segundo a direção transversal possuem a variação indicada na Figura 3.

Figura 3 – Momentos transversais médios no patamar.



Fonte: Araújo (2014).

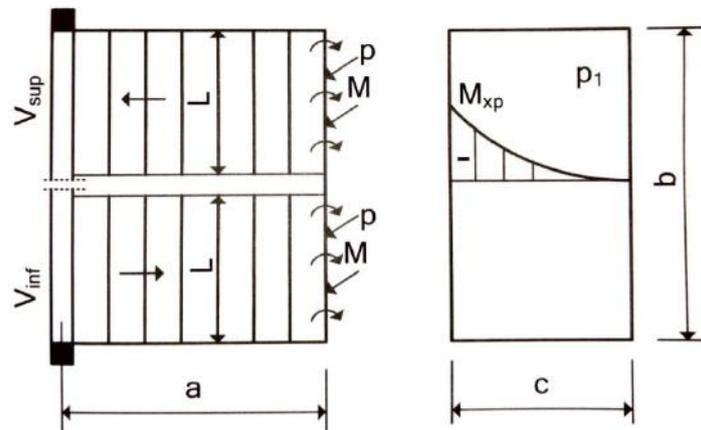
Para efeito de cálculo destes momentos, pode-se considerar que o patamar seja uma laje independente dos lances, possuindo um engaste perfeito ao longo da linha $s-s'$. Assim o momento fletor M_y , por unidade de comprimento, é calculado conforme a Equação 2.

$$M_y = \frac{p_1 \cdot b^2}{8}, \text{ kNm/m} \quad (\text{Eq. 2})$$

Contudo, para efeito de cálculo dos momentos fletores segundo a direção longitudinal da escada, admite-se que o patamar seja uma laje nos dois lances (Figura 4). Assim, o momento negativo por unidade de comprimento M_{xp} , é dado pela Equação 3.

$$M_{xp} = \frac{p_1 \cdot c^2}{2}, \text{ kNm/m} \quad (\text{Eq. 3})$$

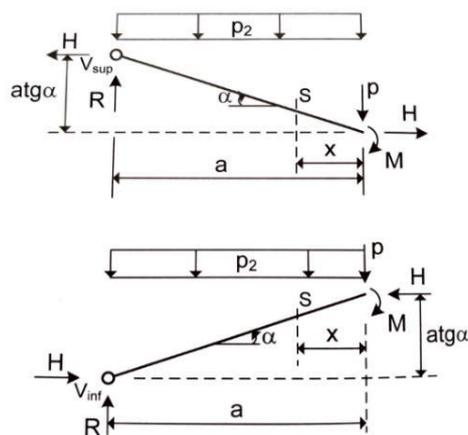
Figura 4 – Consideração do patamar engastado nos lances.



Fonte: Araújo (2014).

Para conseguir obter as reações de apoio, cada lance da escada pode ser analisado como uma viga inclinada, rotulada ou engastada nas vigas de piso (V_{inf} e V_{sup}). O modelo apresentado na Figura 5 considera que os lances sejam rotulados nas vigas de piso. As forças horizontais H são necessárias para manter os lances em equilíbrio.

Figura 5 – Carregamentos nos lances isolados.



Fonte: Araújo (2014).

Os esforços p e M são provenientes da parcela de contribuição do patamar. Assim, resolvendo as barras da Figura 5, obtêm-se as reações R e H , que são calculadas pelas equações 4 e 5, respectivamente.

$$R = p + p_2 \cdot a, \text{ kN/m} \quad (\text{Eq. 4})$$

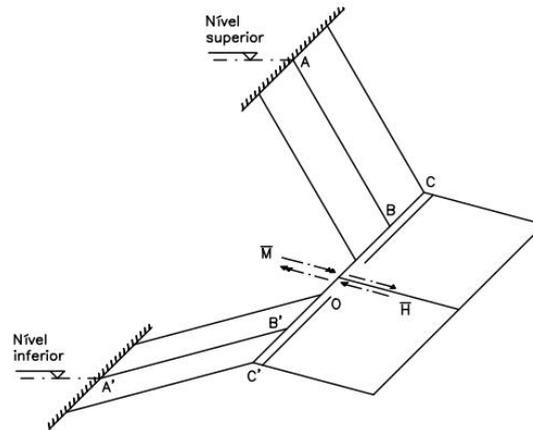
$$H = \frac{1}{a \cdot \text{tg}\alpha} \left(M + p \cdot a + \frac{p_2 \cdot a^2}{2} \right), \text{ kN/m} \quad (\text{Eq. 5})$$

2.2.3 Obtenção de esforços pelo método simplificado de Knijnik & Tavares (1977)

A partir das premissas de Cusens e Kuang (1966 apud Knijnik & Tavares, 1977), ou seja, uma análise da escada através da aproximação, substituindo um sistema espacial de lajes pelo de uma estrutura de barras espacial, Knijnik & Tavares (1977) desenvolveram um método de análise para escadas autoportantes.

O esquema de cálculo encontra-se representado na Figura 6. As grandezas hiperestáticas escolhidas foram o momento fletor M e o esforço H , no ponto O , ponto médio do sistema $A B O B' A'$. Mediante a aplicação destas forças uma das partes em que a estrutura fica dividida é garantida a manutenção do estado equilibrado e pode-se trabalhar com um sistema estaticamente determinado.

Figura 6 – Modelo analítico.



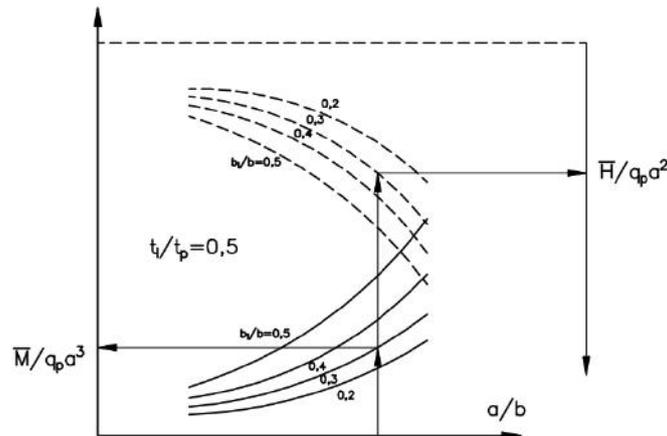
Fonte: Adaptado de Knijnik e Tavares (1977).

A determinação de grandezas hiperestáticas, indispensável para que sejam explicitadas as solicitações internas e reações, deve ser efetuada através da aplicação do teorema de Castigliano a uma das metades, a superior.

Segundo Knijnik e Tavares (1977), em termos de aplicação prática, certas simplificações podem ser adotadas, oriundas de análise e comparação de uma série de escadas deste tipo já projetadas por outros autores. Tais simplificações tornam menor o número de variáveis envolvidas no processo, facilitando, assim, sobremaneira, o cálculo propriamente dito.

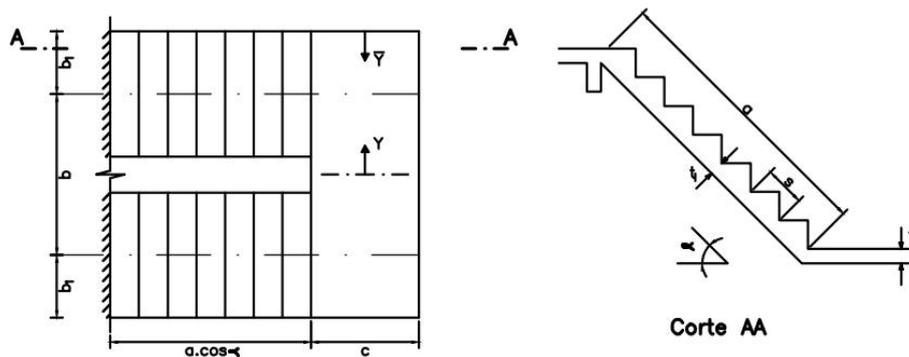
Mediante tal artifício, é possível determinar famílias de curvas que dão diretamente os valores de $\frac{M}{q_p \cdot a^3}$ e $\frac{H}{q_p \cdot a^2}$ em função dos parâmetros $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{b}$ e $\frac{t_1}{t_p}$ (Figura 7). A Figura 8 mostra o corte de uma escada autoportante.

Figura 7 – Curvas para obtenção dos esforços.



Fonte: Adaptado de Knijnik e Tavares (1977).

Figura 8 – Corte de uma escada autoportante genérica.



Fonte: Adaptado de Knijnik e Tavares (1977).

2.2.4 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico que consiste na discretização de um meio contínuo em uma malha de elementos em quantidade e dimensões definidas, de modo que sejam mantidas as propriedades do meio original. A análise por MEF tem como objetivo obter a resposta de uma determinada estrutura com condições de contorno definidas submetidas a certo conjunto de cargas. De acordo com Soriano (2009), esta é uma alternativa que utiliza um método aproximado para a substituição dos infinitos graus de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros a serem determinados, ou graus de liberdade de um modelo aproximado. Segundo Logan (2007), a verificação da precisão de modelos em elementos finitos é de fundamental importância, visto que apresentam resultados mais próximos da realidade. Neste sentido, nesta pesquisa optou-se por se fazer a discretização das escadas com elementos de barra e de casca através da utilização do programa de análise estrutural SAP2000®.

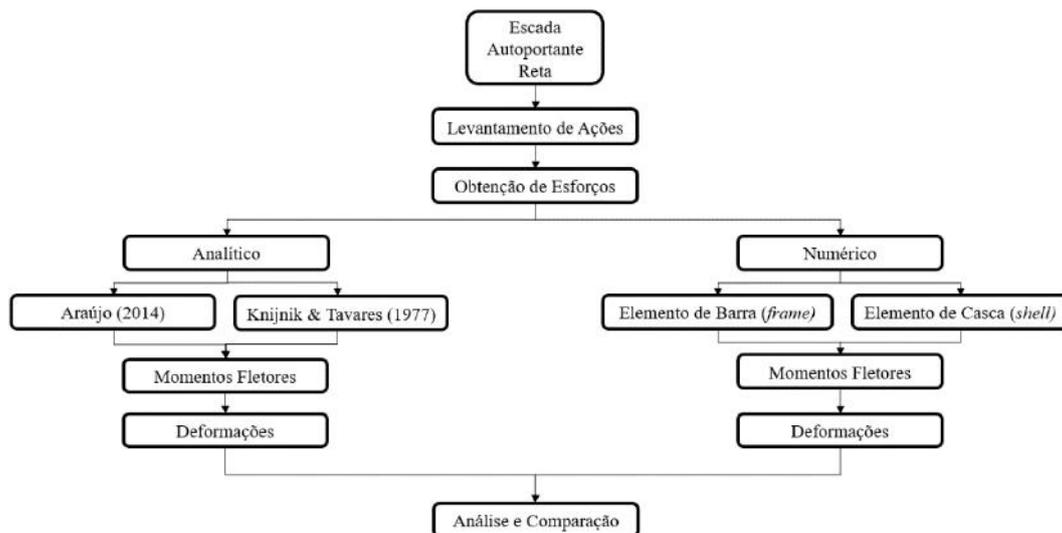
3. Metodologia

A metodologia desta pesquisa foi dividida em três etapas principais, sendo elas: (a) definição da geometria da escada considerando as variáveis de sistema estrutural e espessura; (b) obtenção dos esforços internos solicitantes por meio de modelos analíticos e numéricos; e (c) análises e comparações no ELS.

O estudo consiste na comparação de quatro tipos de métodos de análise, dos quais dois são analíticos e, os outros dois, numéricos. Vale ressaltar que a pesquisa trata de uma análise linear elástica focada, exclusivamente, na obtenção dos esforços

internos e deslocamentos, não sendo, portanto, considerados coeficientes de segurança e/ou critérios normativos para dimensionamento. Para cada um dos métodos foi, inicialmente, definida a geometria – relativa a aspectos geométricos como comprimento, altura e largura – a partir de um projeto já existente, adotando espessura variável. Em seguida, foram levantadas as ações atuantes para posterior obtenção dos esforços de flexão e deformações imediatas, considerando os métodos analítico e numérico, sendo este por meio da aplicação de elementos de barra (*frame element*) e elementos de casca (*shell element*). Assim, a partir dos valores encontrados, procedeu-se a análise e comparação de resultados frente aos diversos modelos e variação da espessura da laje da escada. Estas etapas podem ser visualizadas no fluxograma apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa.



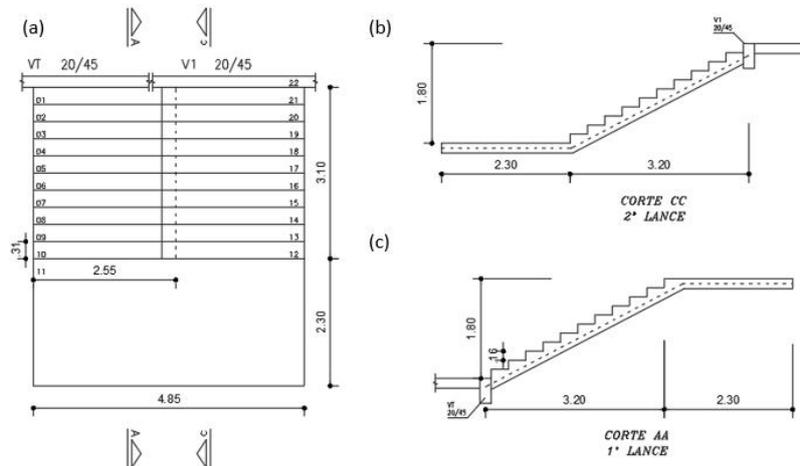
Fonte: Autores.

Foi considerada a classe de agressividade ambiental (CAA) II (ambiente de agressividade moderada) para as escadas, exigindo, assim, um concreto com resistência mínima à compressão de 25 MPa e cobrimento mínimo de 25 mm. Porém, foi adotada a resistência de 30 MPa e cobrimento de 30 mm, respeitando as condições da norma NBR 6118 (ABNT, 2014).

3.1 Geometria dos modelos analisados

Os modelos de escada estudados nesta pesquisa foram concebidos a partir de um projeto base de escada autoportante desenvolvido pela Superintendência de Infraestrutura da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), atendendo aos preceitos da NBR 9050 (ABNT, 2004) e da NBR 9077 (ABNT, 2001), assim como da literatura de Cunha e Souza (1994). A estrutura de referência é uma escada autoportante em U de superfície inferior reta (Figura 10), composta por dois lances adjacentes e sobrepostos, apoiada somente nos pavimentos inferior e superior. A escada possui degraus em concreto, com espelho e piso de dimensões iguais a $e = 31$ cm e $p = 16,36$ cm.

Figura 10 – Planta de forma da escada em análise. (a) planta, (b) corte do lance superior e (c) corte do lance inferior.



Fonte: Autores.

3.2 Modelos estruturais

A partir da geometria estabelecida, foram determinadas algumas condições de projeto, estabelecendo três grupos de modelos de escadas. No primeiro grupo, os esforços foram obtidos por meio dos métodos analíticos apresentados por Knijnik e Tavares (1977) e por Araújo (2014). Já o segundo e terceiro grupos foram compostos, respectivamente, pelos modelos em MEF formados por elementos de barra e elementos de casca. Nos grupos referentes aos modelos numéricos, foram definidas variações nas vinculações dos apoios – apoiadas, engastadas e apoiadas com continuidade.

Além das variações nas condições de apoio, para cada modelo estabelecido também houve a variação de espessura. Foram determinadas três dimensões padrão de 12 cm, 18 cm e 25 cm, correspondendo a uma variação média de 30%. Com isso, foram caracterizados três grupos de análise a partir da geometria adotada, condições de apoio e método de análise.

Portanto, pode-se classificar os modelos analisados neste estudo através das seguintes nomenclaturas, apresentadas no Quadro 1.

- MAA: Escada Autoportante em Modelo Analítico apresentado por Araújo (2014);
- MAK: Escada Autoportante em Modelo Analítico de Knijnik & Tavares (1977);
- MEBA: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Apoiado;
- MEBE: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Engastado;
- MEBC: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra com Continuidade;
- MECA: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca
- MECE: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca Engastado;
- MECC: Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca com Continuidade.

Quadro 1 – Modelos estudados.

GRUPOS	MODELOS	TIPOS	MODELAGEM	ESPESSURA (h)
G1	MAA12	Araújo (2014)	Modelo analítico	12
	MAA18			18
	MAA25			25
	MAK12	Knijnik & Tavares (1977)		12
	MAK18			18
	MAK25			25
G2	MEBA12	Apoio	Modelo com elemento de barra	12
	MEBA18			18
	MEBA25			25
	MEBE12	Engaste		12
	MEBE18			18
	MEBE25			25
	MEBC12	Apoio com continuidade		12
	MEBC18			18
	MEBC25			25
G3	MECA12	Apoio	Modelo com elemento de casca	12
	MECA18			18
	MECA25			25
	MECE12	Engaste		12
	MECE18			18
	MECE25			25
	MECC12	Apoio com continuidade		12
	MECC18			18
	MECC25			25

Fonte: Autores.

3.3 Levantamento das ações

Para a obtenção do peso próprio dos trechos de patamar e lance da escada foi utilizado o peso específico do concreto indicado na NBR 6118 (ABNT, 2014), de 25 kN/m³. A Tabela 1 mostra os valores obtidos, considerando g_1 como a carga no patamar, calculada utilizando o valor da espessura, e g_2 como a carga no lance, calculada a partir da altura média do trecho – soma entre a altura vertical da laje e metade da altura dos degraus.

Tabela 1 – Peso próprio em função da espessura.

Altura h (cm)	Peso próprio (kN/m ²)	
	g ₁	g ₂
12	3,00	5,44
18	4,50	7,13
25	6,25	9,11

Fonte: Autores.

A carga de revestimento adotada foi de 1 kN/m² em todos os modelos analisados, visto que satisfaz com segurança as condições dos materiais normalmente utilizados para esta finalidade.

A NBR 6120 (ABNT, 2019) estabelece, para escadas com acesso ao público, a sobrecarga acidental de 3 kN/m², sendo este o valor utilizado em projeto.

Além disso, o projeto da escada de referência prevê um possível guarda-corpo ou alvenaria em seu perímetro externo. Porém, como simplificação de projeto, esta carga linear foi distribuída por toda a área da escada como um carregamento uniformemente distribuído. Para tanto, foi adotada uma carga de 2 kN/m² para guarda-corpo e alvenaria.

3.4 Modelos analíticos

A partir do método apresentado por Araújo (2014), é possível obter os momentos fletores máximos atuantes nos lances e patamares, bem como as reações horizontais e verticais. Para tanto, os lances são analisados como vigas inclinadas, sendo a condição de vinculação nos apoios o fator que determinará os esforços internos resultantes. Sendo assim, para esta análise foram considerados apoios nos pisos, visto que os momentos fletores negativos surgirão enquanto a escada estiver no Estádio I. Porém, faz-se necessária a colocação de armaduras de ligação no intuito de ancorar a escada no piso superior, para os esforços de tração existentes.

Já através do método de Knijnik e Tavares (1977), é possível obter apenas o momento fletor e a força horizontal no centro do patamar. Ao contrário do modelo apresentado por Araújo (2014), em que não se faz necessário o engastamento dos lances nos pisos, neste método, mediante a aplicação das ações a cada uma das partes em que a estrutura fica dividida, é garantida a manutenção do estado equilibrado, sendo possível trabalhar com um sistema estaticamente determinado.

3.5 Modelos numéricos

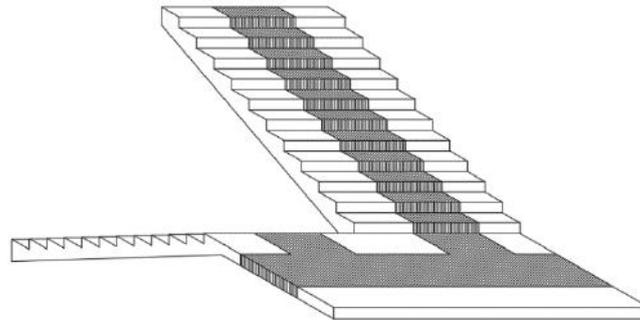
A obtenção dos momentos fletores nas escadas autoportantes foi realizada com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000®, considerando o regime linear elástico e as ações características, visto que o objetivo da pesquisa é a comparação percentual de esforços e deslocamentos. Em todos os modelos foram utilizadas as mesmas características de material, como indicado na NBR 6118 (ABNT, 2014). As propriedades do material concreto armado adotadas foram:

- Peso específico: 25 kN/m³;
- Resistência à compressão: 30 MPa;
- Módulo de elasticidade: 26.838,41 MPa – calculado conforme o item 8.2.8 da NBR 6118 (ABNT, 2014), considerando o granito como agregado graúdo;
- Coeficiente de dilatação térmica: 10-5/°C;
- Coeficiente de Poisson: 0,2.

Em primeira análise, para construção dos modelos, optou pela utilização de elementos de barra (*frame element*). Para tanto as barras foram posicionadas no plano médio das lajes da escada, obtido através da planta de forma. A seção transversal do elemento de barra foi definida a partir da altura real da estrutura e com comprimento de base unitário, visto que os métodos

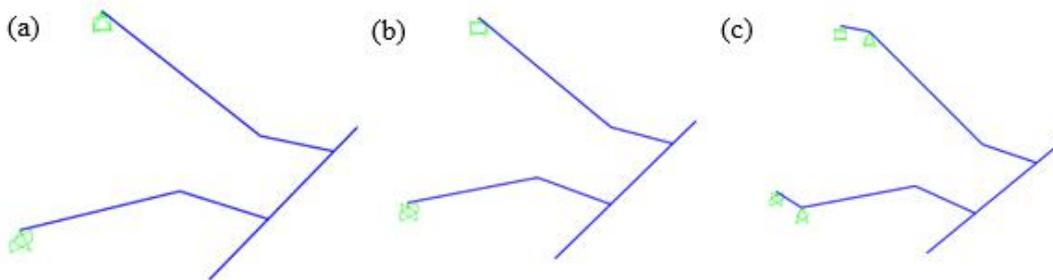
analíticos e de casca fornecem esforços por metro. Ao todo, nove tipos de modelos foram propostos com elementos de barra. Primeiramente variando sua vinculação entre apoiado, engastado e apoiado com continuidade, e para cada tipo de vinculação existem três espessuras de laje (Figuras 11 e 12).

Figura 11 – Faixa de um metro estabelecida para seção do modelo de barra.



Fonte: Autores.

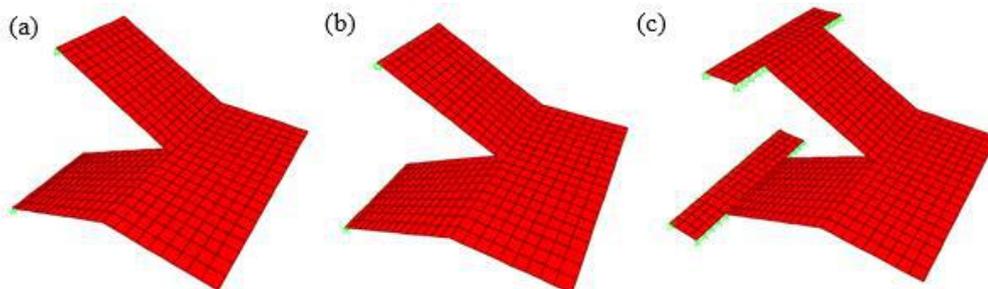
Figura 12 – Modelo com elementos de barra: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.



Fonte: Autores.

Em segunda análise, as escadas foram modeladas como elementos de casca (*shell element*). Neste caso, foi realizado previamente um estudo de malha, sendo definido para os patamares e lances a utilização de elementos de quatro nós e com dimensões de aproximadamente 25 cm (Figura 13).

Figura 13 – Modelo com elementos casca: (a) apoiado, (b) engastado e (c) apoiado com continuidade.

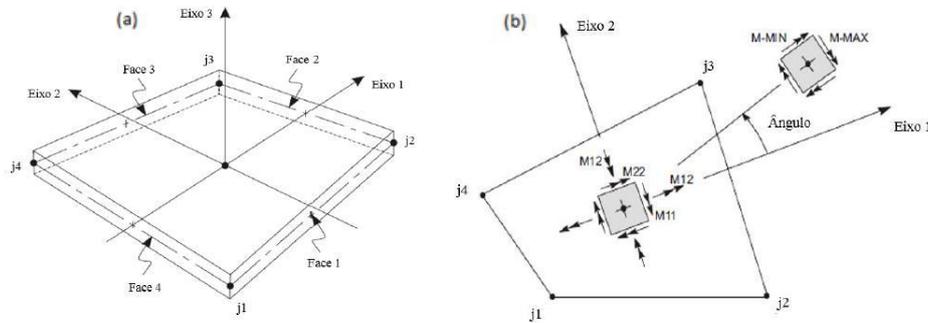


Fonte: Autores.

Os esforços de flexão foram coletados em pontos das cascas onde ocorreram os máximos valores positivos e negativos, em cada direção. Eles são resultantes da integração das tensões na espessura do elemento, os quais são forças e

momentos por unidade de comprimento em cada ponto da superfície média do elemento. A Figura 14 mostra o sistema de eixos locais que é adotado pelo programa para um elemento de casca de 4 nós e as convenções de sinal para os esforços internos de flexão e momentos de torção.

Figura 14 – (a) Eixos locais de um elemento de casca de 4 nós; (b) Esforços internos de flexão e torção no elemento de casca.



Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual - SAP2000*® (2017).

Sendo:

- M11: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 2;
- M22: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 1 e 3 em torno do eixo 1;
- M12: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 1 e nas faces 1 e 3 em torno do eixo 2.

4. Resultados e Discussão

4.1 Momentos fletores

A partir dos cálculos analíticos e da modelagem numérica, obtiveram-se os valores de momentos fletores nas interfaces lance-piso (m_{lp}), lance-patamar (m_{lpa}), região central do patamar entre lances (m_{pa}) e nos lances (m_l). Para os modelos compostos por elementos de casca, os resultados foram coletados em um ponto médio da região. O modelo de casca foi escolhido como modelo base de comparação, visto que, por se tratar de uma estrutura bidimensional, supõe-se ser esta a que mais se assemelha à estrutura real. O percentual de variação foi calculado segundo a Equação 6.

$$\text{variação} = \frac{\text{valor}_{\text{analisado}} \cdot \text{valor}_{\text{de comparação}}}{\text{valor}_{\text{de comparação}}} \quad (\text{Eq. 6})$$

4.1.1 Análise comparativa entre o método analítico apresentado por Araújo (2014), modelo numérico com elementos de barra apoiado e modelo numérico com elementos de casca apoiado

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para os momentos fletores com o método analítico apresentado por Araújo (2014) e com o modelo numérico com elementos de barra e de casca apoiados para cada região da escada, considerando a variação de espessura das lajes. As Figuras 15, 16 e 17 expõem os gráficos provenientes dos valores tabelados.

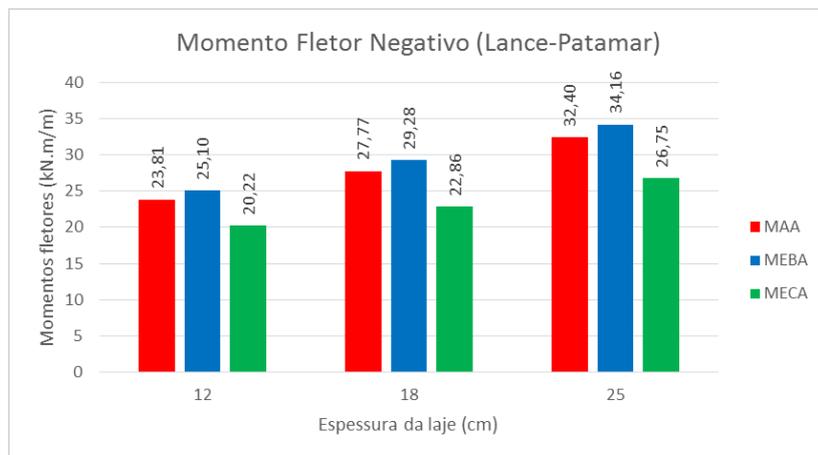
Tabela 2 – Valores de momentos fletores para as lajes de 12 cm, 18 cm e 25 cm de espessura do método analítico apresentado

por Araújo (2014) e do modelo numérico com elementos de barra e de casca apoiados.

Modelo	m_{lp}' (kNm/m)	m_{pa}' (kNm/m)	m_l (kNm/m)	m_{pa}' (kNm/m)
MAA12	-	-23,81	5,51	-26,46
MEBA12	-	-25,10	4,05	-13,57
MECA12	-	-20,22	7,19	-21,11
MAA18	-	-27,77	6,19	-30,87
MEBA18	-	-29,28	4,41	-19,28
MECA18	-	-22,86	8,13	-27,49
MAA25	-	-32,40	7,00	-36,02
MEBA25	-	-34,16	4,85	-24,92
MECA25	-	-26,75	9,23	-32,57

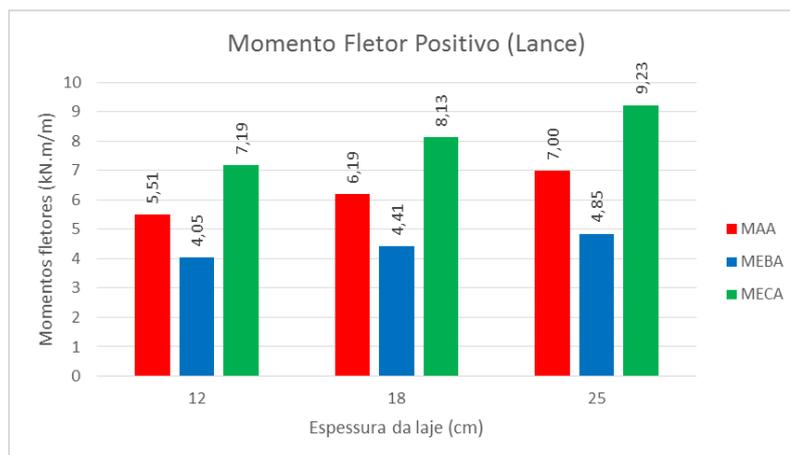
Fonte: Autores.

Figura 15 – Momentos fletores negativos na região lance-patamar.



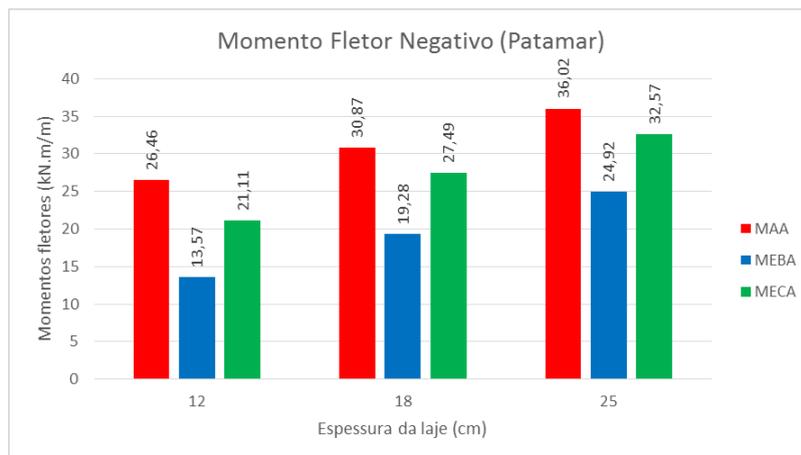
Fonte: Autores.

Figura 16 – Momentos fletores positivos na região do lance.



Fonte: Autores.

Figura 17 – Momentos fletores positivos na região central do patamar.



Fonte: Autores.

Observa-se que, em todos os modelos, existe o incremento dos valores de esforços à medida que a espessura da laje da escada aumenta. No entanto, esse aumento varia de maneira específica para cada modelo.

No que diz respeito aos momentos fletores negativos que aparecem na interface lance-patamar, vê-se que o modelo de casca possui os menores valores absolutos. Isto se dá devido à melhor distribuição de esforços que acontece neste modelo, ao contrário do que acontece com os elementos de barra. Assim, percebe-se uma variação de 18% a 21% – a depender da espessura da laje –, entre o modelo analítico e o modelo numérico de casca, e uma variação de 24% a 28% entre os modelos numéricos de barra e de casca. Portanto, o método analítico apresentado por Araújo (2014) apresentou a melhor aproximação frente ao modelo numérico com elementos de barra.

Em seguida, quando são observados os valores de momentos fletores positivos ao longo do lance, é possível notar a coerência frente aos resultados analisados anteriormente. Como foi visto, os momentos negativos na região lance-patamar nos modelos de casca, independente da espessura, foram sempre inferiores aos apresentados nos outros dois modelos, refletindo assim em maiores momentos positivos na região do lance.

Mais uma vez, o método analítico apresentou valores mais próximos àqueles obtidos pelos elementos de casca, com uma variação de -23% a -24%, ao passo que o modelo composto por elementos de barras obteve uma divergência de -44% a -47%.

Na comparação dos momentos fletores na região central do patamar, destaca-se a aproximação do método analítico ao modelo numérico com elementos de casca à medida que a espessura da laje aumenta e, conseqüentemente, os carregamentos, variando de 25% a 11%. Os modelos compostos por elementos de barra apresentaram valores bem inferiores, fato que pode ser justificado pela aproximação devido à simplificação da geometria real, o que não reflete os esforços apresentados pelos outros dois modelos, apresentando uma variação de -36% a -23% comparado ao modelo numérico de casca.

4.1.2 Análise comparativa entre os modelos numéricos com elementos de barra (engastado e com continuidade) e elementos de casca (engastado e com continuidade)

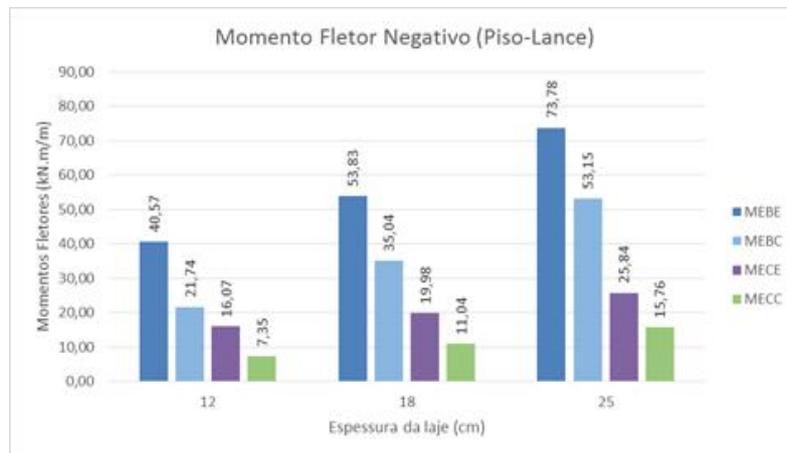
A Tabela 3 apresenta os dados de esforços de flexão em cada região da escada com a variação de espessura da laje para os modelos numéricos com elementos de barra e de casca engastados e com continuidade. As Figuras 18, 19 e 20 expõem os gráficos provenientes dos valores tabelados.

Tabela 3 – Valores de momentos fletores para as lajes de 12 cm, 18 cm e 25 cm de espessura dos modelos numéricos com elementos de barra e de casca engastados e com continuidade.

Modelo	m_{lp}' (kNm/m)	m_{lpa}' (kNm/m)	m_l (kNm/m)	m_{pa}' (kNm/m)
MEBE12	-40,57	-25,10	-16,23	-11,56
MEBC12	-21,74	-25,10	-6,92	-11,33
MECE12	-16,07	-20,89	-3,18	-18,39
MECC12	-7,35	-20,54	1,92	-19,93
MEBE18	-53,83	-29,28	-22,50	-15,66
MEBC18	-35,04	-29,28	-13,10	-15,11
MECE18	-19,98	-23,77	-5,36	-23,86
MECC18	-11,04	-23,38	0,40	-25,38
MEBE25	-73,78	-34,16	-32,04	-19,18

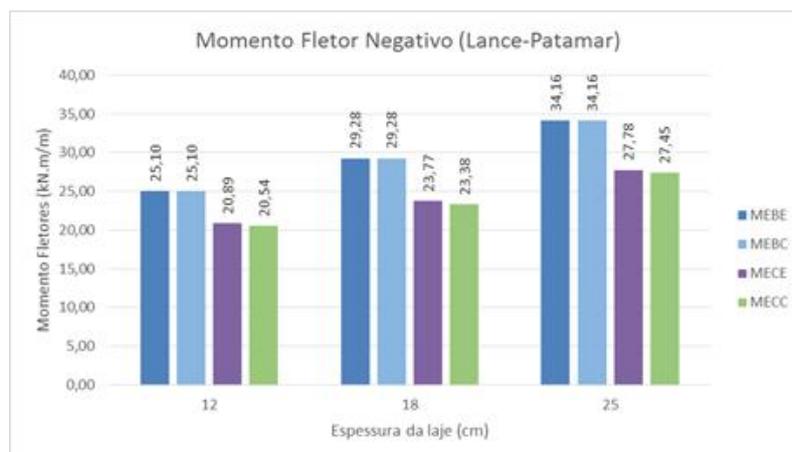
Fonte: Autores.

Figura 18 – Momentos fletores negativos na região piso-lance.



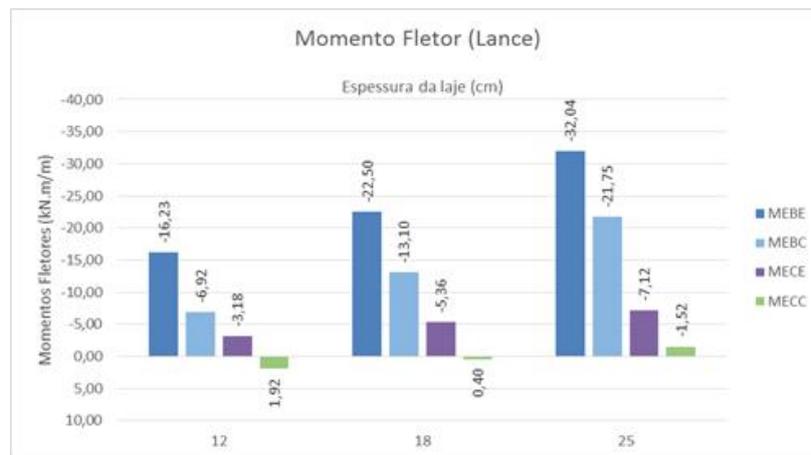
Fonte: Autores.

Figura 19 – Momentos fletores negativos na região lance-patamar.



Fonte: Autores.

Figura 20 – Momentos fletores positivos na região do lance.



Fonte: Autores.

A partir dos resultados apresentados, é possível notar a discrepância tanto entre os esforços dos modelos de barra e casca quanto entre os tipos de vinculação. Por possuir maior rigidez, era esperado que a vinculação de engaste produzisse maiores momentos em relação aos apoios com continuidade, porém, se for tomado como parâmetro de comparação o modelo composto por elementos de casca e com continuidade no apoio, os momentos produzidos pelo modelo de barras engastado são, em alguns casos, quase cinco vezes maiores. Além da melhor distribuição de esforços possibilitada pelos modelos com elementos de casca, a aproximação da laje do lance pelo elemento de barra de largura unitária não reflete a realidade, fornecendo esforços muito superiores àqueles esperados.

Consequentemente, tal diferença incide sobre os esforços de flexão que surgem nos lances. Os modelos de barra, os quais possuem maiores valores de momento no apoio, apresentam momentos negativos elevados no lance. Já os modelos de elementos de casca, mais precisamente aqueles com continuidade, por possuírem menores valores de momento devido à menor rigidez, possibilitam o aparecimento de momentos positivos no lance da escada.

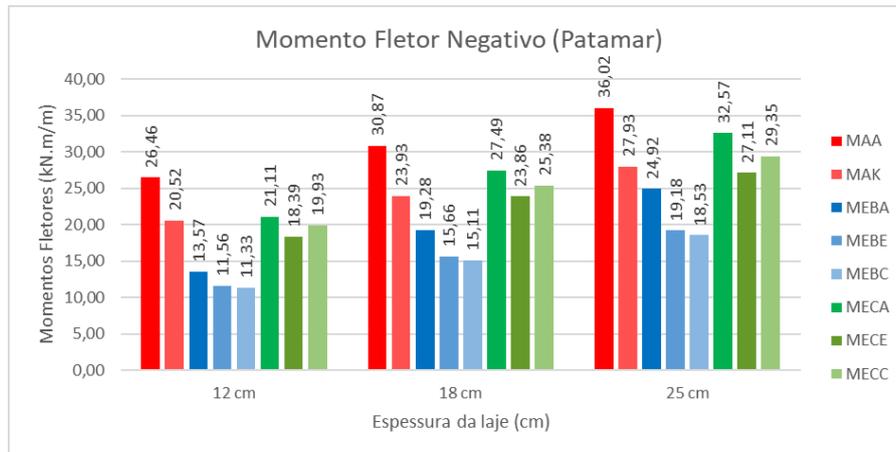
Ao contrário das divergências entre os momentos negativos no apoio apresentadas anteriormente, vê-se que os esforços de flexão entre lance e patamar apresentam certa aproximação. Não houve variação entre os modelos de barra engastados e com continuidade, o que permite a suposição de que a vinculação não afeta o momento fletor desta localidade. Isto vale para os modelos de casca engastados e com continuidade, que apresentaram variação de 1% a 2%. Ao se comparar o modelo de casca com continuidade aos modelos compostos por elementos de barra, obteve-se a maior variação, de 22% a 24%.

Além disso, assim como na análise comparativa anterior, os momentos negativos presentes na região central do patamar obtidos através dos modelos de barra são bastante inferiores àqueles dos modelos de casca com continuidade, com variação de -42% a -35% para o modelo com elementos de barra engastados, -43% a -37% para o modelo com elementos de barra e apoio com continuidade e -8% a -6% para o modelo com elementos de casca engastados.

4.1.3 Análise comparativa entre Knijnik e Tavares (1977), Araújo (2014), modelos com elementos de barra (apoado, engastado e com continuidade) e modelos numéricos com elementos de casca (apoado, engastado e com continuidade)

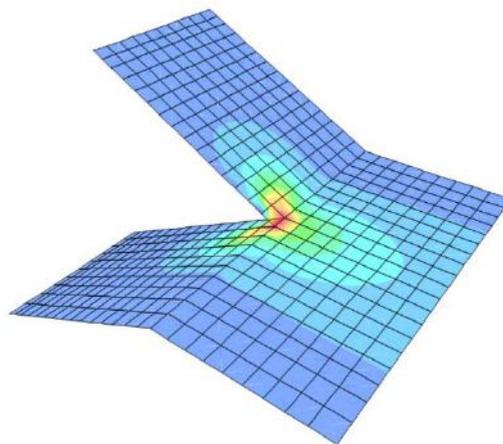
Nesta análise, que envolve Knijnik e Tavares (1977), Araújo (2014) e modelos numéricos com elementos de barra e de casca apoiados, engastados e com continuidade, foi feita a comparação entre os valores dos momentos fletores negativos presentes na região central do patamar próxima aos lances (Figura 21). Este local possui relevante importância no estudo de escadas autoportantes, pois é nele que se desenvolve a concentração de esforços mostrada na Figura 22.

Figura 21 – Gráfico comparativo dos momentos fletores positivos na região central do patamar de Knijnik e Tavares (1977), Araújo (2014) e modelos numéricos com elementos de barra e de casca apoiados, engastados e com continuidade.



Fonte: Autores.

Figura 22 – Concentração de esforços na região central do patamar.



Fonte: Autores.

Dentre os métodos analíticos, o método apresentado por Araújo (2014) apresentou maiores valores frente a todos os outros modelos, independente da espessura, porém, com maior divergência para a laje de 12 cm, 33% maior. O método de Knijnik e Tavares (1977) mostrou resultados satisfatórios devido à boa aproximação aos modelos de casca, variando de -5% a 3%.

Considerando os modelos compostos por elementos de barra, de maneira geral, os esforços se mostram muito aquém àqueles apresentados pelos outros modelos, não sendo a melhor alternativa para obtenção de momentos nesta região, com diferenças percentuais de -43% a -15%. Em relação aos modelos compostos por elementos de casca, os esforços foram semelhantes, variando de -8% a 11%, independente das vinculações.

Pode ser visto que, como um todo, os modelos que possuíam menor rigidez na vinculação demonstraram maior deformação da estrutura e geraram maiores esforços na região central do patamar.

4.1.4 Análise comparativa global devido à variação de espessura na laje da escada

Para esta análise, foram utilizados o método analítico simplificado de Araújo (2014) e modelos numéricos de barra e de casca, ambos apoiados. Esta comparação visa demonstrar a variação dos esforços obtidos, em cada modelo, frente à

mudança na espessura da laje, de 12 cm para 25 cm. As Tabelas 4 a 6 apresentam os resultados de esforços de flexão em cada região da escada com a variação de espessura da laje.

Tabela 4 – Comparativo entre momentos negativos da região lance-patamar.

Momento negativo (lance-patamar)			
Modelos	MAA	MEBA	MECA
12 cm	23,81	25,10	20,22
25 cm	32,40	34,16	26,75
Variação	27%	27%	24%

Fonte: Autores.

Tabela 5 – Comparativo entre momentos negativos da região do lance.

Momento negativo (lance)			
Modelos	MAA	MEBA	MECA
12 cm	5,51	4,05	7,19
25 cm	7,00	4,85	9,23
Variação	21%	16%	22%

Fonte: Autores.

Tabela 6 – Comparativo entre momentos negativos da região do patamar.

Momento negativo (patamar)			
Modelos	MAA	MEBA	MECA
12 cm	26,46	13,57	21,11
25 cm	36,02	24,92	32,57
Variação	27%	46%	35%

Fonte: Autores.

A partir dos valores obtidos para os esforços presentes na interface lance-patamar, o modelo de casca apresentou menor variação frente à alteração de espessura e, assim, aumento de carregamento. Porém, quando é analisado o momento fletor positivo no lance, o modelo de barra apresenta menor variação. De modo geral, as maiores alterações ocorreram para os esforços presentes na região central do patamar, que se mostrou mais sensível ao incremento de carga, com variações de 27% a 46%.

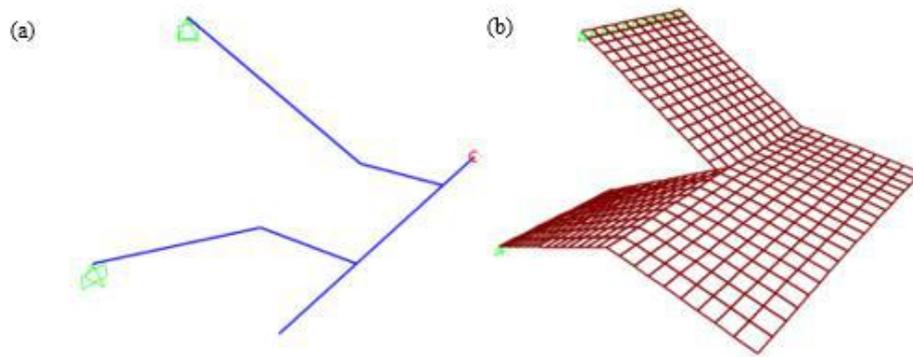
4.2 Deslocamentos

Na análise de deformações, foram observados os deslocamentos elásticos máximos fornecidos pelo método analítico apresentado por Araújo (2014), através da Equação 7, e pelos modelos compostos por elementos de barra e casca, nas diferentes vinculações, submetidos a carregamentos característicos.

$$W_0 = \frac{1}{E_{cs} \cdot I_c} \cdot \left(\frac{P_1 \cdot c^4}{8} + \frac{M \cdot a \cdot c}{3 \cdot \cos \alpha} \right) \quad (\text{Eq. 7})$$

Os dados foram obtidos a partir de um ponto localizado no extremo do patamar, como apresentado na Figura 23.

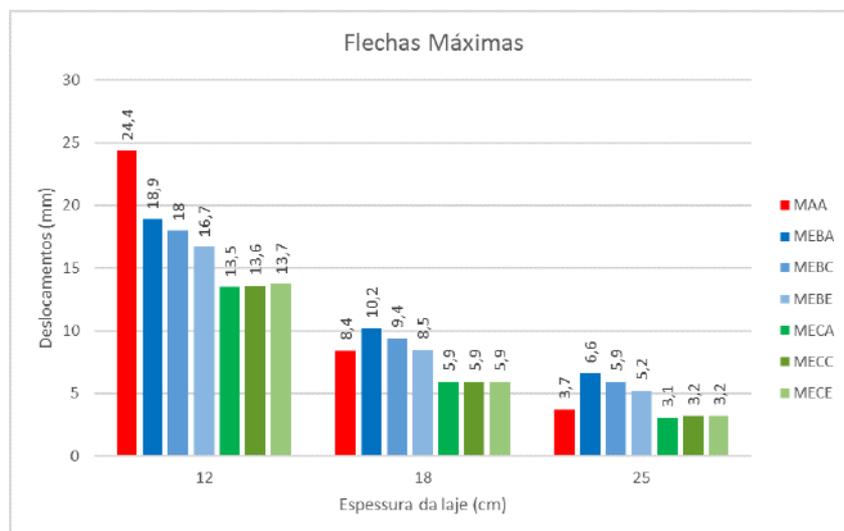
Figura 23 – Localização da obtenção de flechas no (a) modelo de barra e no (b) modelo de casca.



Fonte: Autores.

A Figura 24 mostra os valores, em milímetros, das deformações.

Figura 24 – Gráfico comparativo entre os valores de flecha elástica máxima nos diferentes modelos.



Fonte: Autores.

Assim como nas comparações dos esforços de flexão, novamente tomar-se-á como base o modelo com elementos de casca com continuidade no apoio. Em primeira análise, percebe-se a diminuição nas deformações à medida que espessura da laje da escada aumenta. Isto se dá pelo aumento da rigidez da estrutura, apesar do acréscimo de carga. Pode-se observar, também, que os modelos de barras são mais sensíveis à mudança de vinculação, apresentando maiores flechas para os apoios rotulados e menores para o engaste. Diferentemente dos modelos de casca, que obtiveram valores bastante semelhantes, variando de -3% a 1%.

Quanto ao método analítico, para menores alturas de laje, os valores de deslocamento foram bastante expressivos, superando todos os outros modelos. Porém, ao passo que a espessura aumenta, seus resultados se aproximam dos modelos de casca.

5. Considerações Finais

Ao longo da pesquisa, foi possível ver que ambos os modelos analíticos apresentaram boa aproximação na obtenção dos momentos fletores. Em relação ao método apresentado por Araújo (2014), este obteve variação máxima de 25% comparada ao modelo de casca apoiado, entretanto, considerando todos os pontos analisados, esta variação é reduzida para uma média de 20%. Isto é justificável, pois métodos analíticos tendem a ser mais conservadores em relação ao modelo de casca devido à simplificação da análise da estrutura. Por outro lado, apesar do método de Knijnik e Tavares (1977) fornecer apenas os momentos fletores da região central do patamar, em sua comparação com o modelo de casca com continuidade, seus resultados se mostraram bastante satisfatórios, com variações menores do que 10%.

Ao analisar os modelos formados por elementos de barra, constatou-se que estes divergiram dos outros modelos analisados. Isto pode ter ocorrido pela tentativa de aproximação do comportamento de uma laje utilizando elementos de barras com largura (faixa) unitária. Assim, os momentos fletores encontrados nas interfaces piso-lance e lance-patamar apresentaram valores acima do esperado, resultando no aparecimento de fletores negativos elevados na região central do lance, ao passo que na região central do patamar, os valores de esforços foram muito inferiores aos apresentados nos outros métodos. Este fato pode resultar em uma escada superdimensionada em alguns trechos e subdimensionadas em outros.

Em relação aos deslocamentos elásticos analisados, percebe-se que, apesar do incremento de carregamento, em todos os modelos verificou-se a redução nas flechas com o aumento da espessura da laje, o que pode ser relacionado ao aumento da rigidez da estrutura. Para menores alturas de laje, o método apresentado por Araújo (2014) apresentou maior valor de deformação entre todos, contudo à medida que a espessura aumentou seus valores de flecha se tornam menores do que os modelos de barra, se aproximando do modelo com elementos de casca. Ao contrário dos modelos de barra, aqueles com elementos de casca não sofreram interferência significativa nas deformações devido à vinculação.

Vale ressaltar que esta pesquisa trata de uma análise linear elástica focada, exclusivamente, na obtenção e comparação dos esforços internos e deslocamentos de escadas autoportantes, não sendo, portanto, considerados os critérios gerais da NBR 6118 (ABNT, 2014) para dimensionamento, verificação e detalhamento de tais elementos estruturais. Em complemento, importa frisar que, no caso da obtenção dos esforços internos via Método dos Elementos Finitos (MEF), a sua utilização no dimensionamento dever-se-á atender ao item 14.2.3 da mesma norma.

Por fim, apesar de a NBR 6118 (ABNT, 2014) não sugerir um modelo específico para a obtenção de esforços internos em escadas autoportantes, o uso de modelos simplificados elástico-lineares ainda tem sido recorrente. Contudo, há, na atualidade, um aumento significativo da utilização de modelos numéricos via MEF, visto que nestes é possível discretizar o contínuo, permitindo modelar as escadas com geometrias (formatos) e condições de contorno mais complexas, havendo uma tendência dos resultados de esforços internos e deslocamentos serem mais próximos daqueles obtidos experimentalmente. Deste modo, a princípio, com base nos resultados apresentados na pesquisa, o modelo em elementos de casca seria o mais recomendado pelos autores para este tipo de escadas.

Referências

- ABNT NBR 6118:2014. (2014). Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- ABNT NBR 6120:2019. (2019). Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- ABNT NBR 9050:2004. (2004) Acessibilidade a Edificações, Mobiliário, Espaço e Equipamentos Urbanos. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- ABNT NBR 9077:2001. (2001). Saídas de Emergências em Edifícios. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- Araújo, J. M. (2014). *Curso de Concreto Armado: Volume 4*. Rio Grande, Brasil: Editora Dunas.
- Azambuja, P. (1962). Peças helicoidais bi-engastadas. *Revista Estrutura*, 46, 67-83.

- Bangash, M. Y. H., & Bangash, T. (1999). *Staircases: Structural Analysis and Design*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Chriss, S., Glogau, O. A., Liebenberg, A. C., Cusens, A. R., & Kuang, J. G. (1966). Discussion of experimental study of a free-standing staircase. *American Concrete Institute Journal*, 63(12), 1487-1494.
- Computers & Structures, Inc. (2017). *CSI Analysis Reference Manual: for SAP2000®, ETABS®, SAFE® and CSiBridge®*. Berkeley, USA.
- Cunha, A. J. P., & Souza, V. C. M. (1994). *Lajes em concreto armado e protendido*. Niterói, Brasil: EDUFF.
- Cusens, A. R., & Kuang, J. G. (1966). Experimental study of a free-standing staircase. *American Concrete Institute Journal*, 63(5), 587-604.
- Fuchssteiner, W. (1954). Die freitragende wendeltreppe. *Beton und Stahlbetonbau*, 49(11), 252-259.
- Gould, P. L. (1963). Analysis and design of cantilever staircase. *American Concrete Institute Journal*, 60(7), 881-899.
- Guerrin, A., & Lavour, R. C. (1971). *Traité de Béton Armé*. Paris, France: Dunod.
- Hussain, F. *A simplified analysis and design of free standing stairs resting on partially rigid support*. 2001. 76 f. Master Thesis – Department of Civil Engineering, University of Engineering & Technology, Bangladesh (2001).
- Knijnik, A., & Tavares, J. J. A. (1977). Escada autoportante sem apoio no patamar. *Revista Estrutura*, 81, 109-126.
- Logan, D. L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method*. Platteville: Thomson.
- Oliveira, C. R. (2008). Considerações sobre Modelos Estruturais. *Ciência et Praxis*, 1(01), 33–38. <https://revista.uemg.br/index.php/praxys/article/view/2068>
- Sauter, F. (1964). Free standing stairs. *American Concrete Institute Journal*, 61(7), 847-870.
- Soriano, H. L. (2009). *Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Ciência Moderna Ltda.
- Taleb, N. J. (1964). The analysis of stair with unsupported intermediate landings. *Concrete and Constructional Engineering*, 59(9), 315-320.